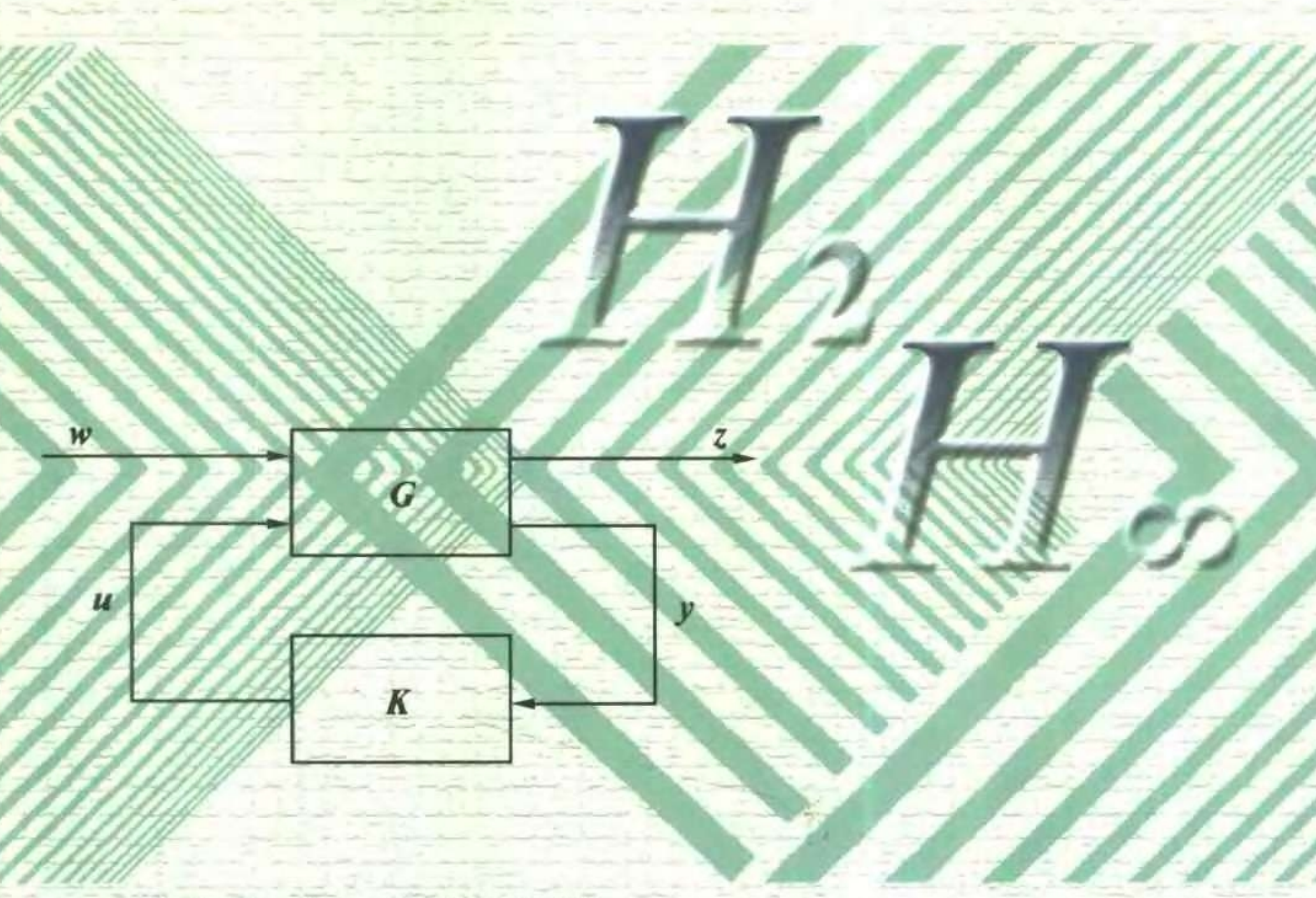
H_2和H_∞优化控制理论

王德进　编著



哈尔滨工业大学出版社

H_2和H_∞优化控制理论

王德进　编著

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内 容 简 介

H_2 和 H_∞ 优化控制是控制系统设计所追求的目标。本书介绍该研究领域近十多年来国内外的最新研究成果。

全书共分七章，重点讨论 H_2 和 H_∞ 优化控制器设计理论和各种求解方法。内容包括：必备数学基础知识；线性二次型最优控制理论和近年来所取得的新进展；优化控制理论的频率域设计方法及其应用；基于 Riccati 方法和 LMI 技术的广义被控系统，时滞系统的 H_∞ 状态反馈，输出反馈解；H_2/H_∞ 混合控制的概念和几种求解方法。

本书可作为高等学校自动控制专业及相关专业的硕士研究生教材，亦可供高等学校教师、工程技术人员以及高年级本科生参考。

图书在版编目(CIP)数据

H_2 和 H_∞ 优化控制理论/王德进编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2001.3

ISBN 7-5603-1565-8

Ⅰ.H... Ⅱ.王... Ⅲ.自动控制:最佳控制系统-研究 Ⅳ.TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 72834 号

出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真　0451—6414749
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787×1092　1/16　印张 15.5　字数 394 千字
版　　次　2001 年 3 月第 1 版　2001 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7-5603-1565-8/TP·150
印　　数　1~3 000
定　　价　19.80 元

前　言

控制系统所要解决的问题是，设计一个控制器(校正装置)，使闭环系统保持内稳定性，同时使系统达到一定的性能指标要求。经典控制理论所考虑的系统性能包括瞬态性能和稳态性能，其设计方法基本上是一种图解法、试凑法，难以对性能指标进行优化处理。现代最优控制理论是一种严格的数学解析方法，可实现性能指标的最优化，以期达到最佳的控制效果。具有广泛工程背景的线性二次型最优调节器问题就是一种典型的最优控制问题。线性二次型性能指标(H_2 性能指标)的提出实际上是对经典控制理论中系统瞬态性能、稳态性能以及控制能量约束的综合考虑。但最优控制理论要求精确已知系统的数学模型，而没有考虑模型误差的影响。实际控制系统设计中，模型误差的存在是不可避免的，这就限制了 H_2 最优控制理论的应用。

现代鲁棒控制是针对当数学模型存在不确定性(包括外部干扰和未建模动态)时，所设计的控制器仍能使系统保持内稳定性和理想的性能要求，在一定程度上弥补了现代控制理论对数学模型依赖过高的缺陷。那么，当数学模型存在不确定性时，又如何来度量系统的性能呢？20 世纪 80 年代初提出的以系统的 ∞-范数为性能指标的 H_∞ 控制理论是目前解决鲁棒控制问题比较成功且比较完善的理论体系，已成为近 20 年来自动控制理论及工程应用研究的热门课题之一。H_2 最优控制系统具有较好的系统性能，而 H_∞ 控制理论能较好地解决系统的鲁棒性问题，将两者结合起来，就是所谓的 H_2/H_∞ 混合控制问题。本书的目的在于向读者介绍 H_2 和 H_∞ 优化控制理论以及 H_2/H_∞ 混合控制问题在 90 年代所取得的最新研究成果，使读者能尽快进入该领域的前沿，为进一步从事这方面的学习和研究做好必要的铺垫。全书围绕 H_2、H_∞ 优化控制理论这一主线逐步展开，并贯穿始终。

全书共分七章：第一章针对工科学生的特点，介绍学习本书必须具备的数学基础知识；第二章介绍线性二次型最优控制问题；第三章介绍优化控制理论的频率域设计方法及应用；第四章应用 Riccati 方法和 LMI 技术，对 H_∞ 状态反馈解和输出反馈解做了较全面的介绍；第五章针对具有广泛工程背景的线性时滞系统，给出 H_∞ 控制器设计的各种方法；第六章介绍 H_2 优化控制理论近年来的发展和取得的新成果；第七章介绍 H_2/H_∞ 混合控制问题的基本概念和几种求解方法。主要章节配有适当的例题和习题，便于读者理解基本理论和便于自学。

本书在写作过程中，既突出物理概念的讲解，又注重数学推理的逻辑性和严谨性。我们知道从事科学研究工作，首先要从工程实际问题出发、从物理概念上提出问题。然后，再从数学上推导出相应的结果。所以，清晰的物理概念和熟练的数学基本功对培养科研能力是相辅相成、不可缺少的。

作者在写作过程中，除基本内容的必要的逻辑衔接之外，尽量避免与国内同类著作在内容上的重复，并增加了一些新成果、新方法，如参数化控制器的应用、LMI 方法、时滞系统 H_∞ 控制、H_2 控制的新进展以及 H_2/H_∞ 混合控制。需要说明的是，对这些新内容，为了突出主要结果，并便于初学者掌握基本理论，有些地方仅给出结论，避开了较繁琐和冗长的证明过程。有深入研究兴趣的读者可查阅书后的参考文献。

本书的前五章可作为课堂讲授的基本内容，可按 54 学时组织教学。第五章的部分内容以及第六章、第七章是为有志从事 H_2 和 H_∞ 优化控制理论研究的读者编写的，以求今后能顺利阅读该领域的国内外最新文献。

再要说明的是，本书主要针对线性定常连续系统，介绍了 H_2 和 H_∞ 优化控制理论的 Riccati 方法和 LMI 方法，并对频率域方法也做了一定的讨论。对于非线性系统、离散系统、时变系统的 H_2 和 H_∞ 优化控制理论，以及 H_∞ 鲁棒性能准则问题的 μ 方法和早期的 H_∞ 控制的算子理论等，有兴趣的读者可查阅有关文献。

还要说明的是，阅读本书应具备控制理论方面的基础知识，如经典的自动控制原理，现代控制理论的线性系统、最优控制，以及必要的数学基础。当然，没有学过最优控制的读者，通过阅读本书的第二章也能掌握其主要内容。

本书是在作者讲授《鲁棒控制》硕士研究生课程讲义的基础上扩充而成的。其中融入了国内外许多同类著作和最新文献的内容，在此不一一列举，谨向作者们表示深深的谢意。

哈尔滨工业大学控制科学与工程系赵长安教授审阅了全部书稿，并提出了许多修改意见。黑龙江大学自动化系邓自立教授对本书的写作进行了指导和鼓励。他们严谨的治学态度，渊博的学识，作者将终生难忘。我的学生丁大勇帮助整理了部分书稿，在此表示感谢。

由于作者涉足该研究领域较晚，学识有限，加之写作时间仓促，书中疏漏和不当之处在所难免，恳请读者批评指教。

作　者

2000 年 10 月于哈尔滨

目　　录

绪　论

1　H_2 控制

控制系统设计的基本任务是求一个控制器使得闭环系统保持稳定性和具有满意的系统性能。闭环系统首先必须是稳定的，不稳定的系统是无法正常工作的。在稳定的基础上，再追求系统满足一定的性能要求，这样的控制系统才具有实际应用价值。那么，如何来度量控制系统的性能(控制效果)呢？有了性能的度量，又如何对其进行优化，以期达到最佳的控制品质，提高产品的产量和质量呢？在经典控制理论中，考察控制系统性能的方法是在系统的输入端施加某种典型的输入信号，然后，测量系统输出响应。例如，对于稳定的控制系统，典型的单位阶跃响应如图1所示。其中 $y(t)$ 为系统的输出变量。整个响应过程可分为瞬态过程和稳态过程。瞬态过程的主要性能指标有最大超调量 $\delta\%$ 和调节时间 t_s(取误差带 $\Delta=\pm5\%$ 或 $\pm2\%$)。稳态过程的性能指标为稳态误差 ε_{ss}。一个"好"的控制系统要求 $\delta\%$ 和 t_s 应较小，同时 ε_{ss} 也应尽可能地小。当然，上述各性能指标之间有时是相互矛盾的，必须根据实际需要进行某种折衷。

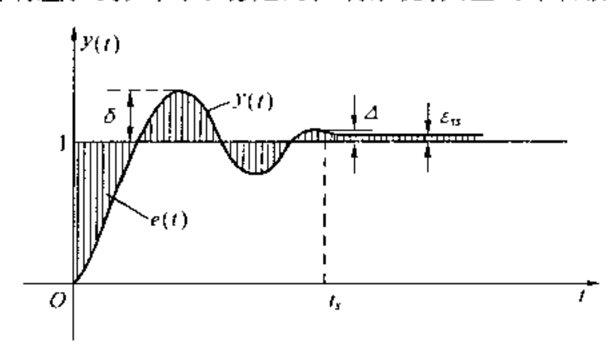


图1　典型的单位阶跃响应

现代控制理论中的最优控制问题，是一种典型的优化控制问题。最优控制问题所要解决的是设计一个控制律，使闭环系统是稳定的，同时使某个性能指标达极值。此时的控制律称为最优控制。性能指标的具体形式可根据所追求的控制目标来确定。例如，考虑误差平方积分准则函数

$$J=\int_0^\infty e^2(t)\mathrm{d}t$$

其中 $e(t)=y_0(t)-y(t)$ 为系统误差，如图1中阴影部分所示。$y_0(t)$ 为参考输入。可见，阴影面积的大小，是衡量系统性能好坏的一个合适的尺度。上述准则函数 J 实际上是对经典控制理论中系统瞬态性能和稳态性能的一个综合的评价。对误差平方积分准则函数 J 做适当的推广就得到了最优控制理论中的线性二次型性能指标

$$J=\int_0^\infty[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 为系统状态的偏差，$\boldsymbol{u}(t)$ 为控制输入，$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$ 为加权矩阵。控制变量二次型 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)$ 表示对控制能量的一种限制。如果被控过程的数学模型用随机过程模型描述，且干扰信号是高斯白噪声(有限谱信号)，则相应的线性二次型最优控制问题称为 LQG 问题，其性能指标为

$$J=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left\{\int_0^T[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t\right\}$$

其中 E 为数学期望。可以证明，上述 LQG 问题的性能指标等价于从随机干扰信号到系统被控

输出信号的传函(阵)的 H_2 范数。于是,这种基于随机模型的线性二次型最优控制问题就可以归结为图 2 所示的所谓标准控制问题。图中 K 为待设计的控制器,G 称为广义被控对象,w 为外部干扰信号,z 为输出评价信号,y 为输出量测信号,u 为控制信号。基于图 2,上述 LQG 控制问题可以等价地表述为:设计反馈控制器 K,使闭环系统稳定,同时使从 w 到 z 的闭环传函阵 $G_{zw}(s)$ 的 H_2 范数达到极小,即

$$\min_{K} \| G_{zw}(s) \|_2 = \gamma_0$$

称为 H_2 最优控制问题。若给定 $\gamma > \gamma_0$,求反馈控制器 K,使

$$\| G_{zw}(s) \|_2 < \gamma$$

则称为 H_2 次优控制问题。统称为 H_2 标准控制问题。

图 2　标准控制问题

2　鲁棒控制

我们知道,控制系统的分析或设计,首先要建立系统的数学模型。数学模型的作用在于已知系统的输入时能预计(计算)输出。然而,严格地说,没有一个数学模型能用来准确地作为一个实际物理系统的模型,即总存在不确定性(Uncertainty)。不确定性的存在意味着即使已知输入信号,也无法准确地预计出系统的输出信号。通常不确定性有两个来源:① 未知的或不可预计的输入,如作用于被控过程的各种干扰信号、传感器量测噪声等。② 不可预计的动态特性(未建模动态),如非线性系统的线性化、高阶系统的简化近似等带来的动态特性的改变。

数学模型中不确定性的描述是多种多样的。一种典型的不确定系统模型的基本形式是

$$y = (P + \Delta) u + n$$

这里 y 是输出,u 是输入,P 是标称对象的传函,模型的不确定性以两种形式出现:n 是未知噪声或干扰,Δ 是未知的对象摄动(未建模动态)。

假定关于 n 和 Δ 的特征已预知,即各自属于某一个集合。此时,给定一个控制输入 u,由上述模型可得一个输出信号的集合。这个集合就是由 $(P + \Delta) u + n$ 所构成的集合。这一点就是确定性模型与不确定性模型的区别所在。进一步,这个不确定性模型的集合可以分为两类,即:

(1) 结构化不确定性:是指那些模型与不确定性之间的相互关系的结构是非常明确的不确定性。例如,模型中存在有限个不确定参数。

(2) 非结构化不确定性:是指那些结构不明确的不确定性。在每一频率下,其频率响应位于复平面的一个集合内。例如,考察圆状不确定性。令 P 代表标称对象,$\widetilde{P}$ 代表摄动后的对象,则在每一频率 ω 下

$$\left| \frac{\widetilde{P}(j\omega)}{P(j\omega)} - 1 \right| < r$$

代表 $\widetilde{P}/P$ 位于复平面上以 1 为圆心、r 为半径的圆内。

一般地说,鲁棒性概念是指反馈控制系统的某项性能对于某集合中的每一个对象都是成立的。具体地说,我们有如下鲁棒性定义。

(1) 鲁棒稳定性。设计一个控制器,使对每一个摄动后的对象,都能保证闭环系统的稳定

性。

(2) 鲁棒性能。设计一个控制器,使对每一个摄动后的对象,闭环系统都满足稳定性和某种特定的系统性能。

可见,上述鲁棒性概念是指给定一个控制器,如果某集合中的每一个对象都能保持某种特性成立,则称该控制器对此特性是鲁棒的。因此,谈及鲁棒性必要求有一个控制器,有一个对象的集合和某些系统特性。

3 H_∞控制

在实际控制工程中,被控对象的精确数学模型往往难以得到. 研究证明,LQG(H_2)最优控制系统对被控对象的模型摄动(模型误差)的鲁棒稳定性有时是很差的。此外,许多情况下,仅知道噪声(干扰)信号 w 是属于某个集合,如 w 为能量有限信号 $w \in L_2[0,\infty)$,而并不确知其统计特性(如谱密度函数),这便使得 LQG(H_2)方法难以应用。

针对上述问题,80 年代初,加拿大学者 Zames 提出了以控制系统内某些信号间的传函(阵)的 H_∞范数为优化性能指标的控制系统设计思想。我们以实例来说明 H_∞范数性能指标的引进。

例　最小灵敏度问题。考虑图 3 所示 SISO 单位反馈系统。图中 $P(s)$是被控对象传函,$K(s)$是控制器传函。y 是输出信号,u 是控制信号,r 是参考输入,w 是干扰输入,e 是控制误差信号。考虑从 r 到 e 的误差传函(灵敏度函数)

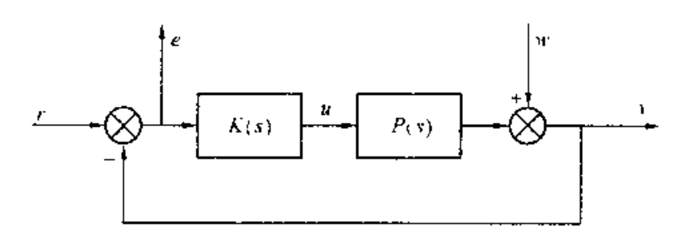


图 3　单位反馈系统

$$S(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + P(s)K(s)}$$

我们的任务是设计控制器 $K(s)$,使得

$$|S(j\omega)| < \gamma, \forall \omega$$

其中 $0 < \gamma \leq 1$。即将控制误差(偏差)控制在工程允许的范围内。上式两端对 ω 取上确界,得到

$$\sup_{\omega} |S(j\omega)| < \gamma$$

将上式左端定义为 $S(s)$的∞－范数,即

$$\| S(s) \|_\infty = \sup_{\omega} |S(j\omega)|$$

H_∞最优控制问题:设计控制器 $K(s)$,使闭环系统保持稳定,且使 $\| S(s) \|_\infty$达极小。即

$$\inf_K \{\sup_{\omega} |S(j\omega)|\} = \inf_K \| S(s) \|_\infty = \gamma_0$$

亦称之为极大极小化问题。

H_∞次优控制问题:给定 $\gamma > \gamma_0$,设计控制器 $K(s)$,使闭环系统保持稳定,且使

$$\| S(s) \|_\infty < \gamma$$

与 H_2 控制问题不同,H_∞最优控制问题难于求解,通常是以 H_∞次优控制问题的解去逼近 H_∞最优控制问题的解,并将 H_∞次优控制问题称为 H_∞标准控制问题。

对于图 3 所示系统,可验证

$$S(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=-\frac{E(s)}{W(s)}$$

因此，最小灵敏度问题也等价于减小干扰 w 对控制误差 e 的影响，即干扰抑制问题。在图3中，令参考输入 $r=0$，则可将干扰抑制问题转化为图1所示的标准控制问题。为此，首先将性能指标 $\| S(s)\|_\infty<\gamma$ 化为

$$\| W(s)S(s)\|_\infty<\gamma$$

其中 $W(s)$ 为权函数，是频率的函数，表示在不同频段对性能的要求不同。于是，可将图3改画为图4所示的 H_∞ 标准控制问题框图。其中评价信号 $z=-W(s)S(s)w$，即从 w 到 z 的闭环传

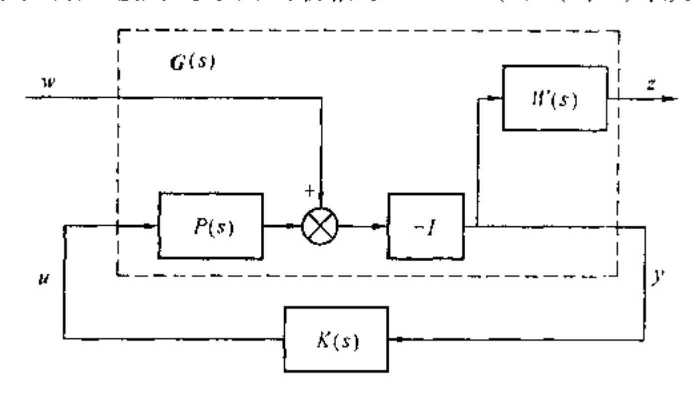


图4　H_∞ 标准控制

函为 $G_{zw}(s)=-W(s)S(s)$。$G(s)$ 表示从 w、u 到 z、y 的闭环传函阵，称为广义被控对象。干扰抑制设计问题可归结为：求控制器 $K(s)$，使图4所示闭环系统稳定，且使 $\| G_{zw}\|_\infty<\gamma$。

以上仅在标量情形下，给出了 H_∞ 性能指标的定义和 H_∞ 标准控制问题的概念。对于多变量系统，传函阵 G_{zw} 的 H_∞ 范数定义为

$$\| G_{zw}\|_\infty=\sup_\omega\bar{\sigma}\{G_{zw}(j\omega)\}$$

其中 $\bar{\sigma}(G)=\{\lambda_{\max}(G^*G)\}^{\frac{1}{2}}$，为 G 的最大奇异值，G^* 为 G 的共轭转置阵，$\lambda_{\max}$ 为最大特征值。

在图1所示标准控制问题中，如果评价信号 z 为向量信号，并将其分块为 $z=\{z_1^T,z_2^T,\cdots,z_m^T\}^T$，记从 w 到 $z_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的闭环传函阵为 $G_{z_iw}(s)$，取 $G_{z_iw}(s)$ 的 H_2 范数或 H_∞ 范数，就得到相应的 H_2 或 H_∞ 多目标控制问题。如果将 z 分块为 $z=\{z_1^T,z_2^T\}^T$，且取

$$\| G_{z_1w}(s)\|_2<\gamma_1,\ \| G_{z_2w}(s)\|_\infty<\gamma_2$$

则相应的标准控制问题称为 H_2/H_∞ 混合控制问题。

4　优化控制理论的发展

20世纪50~60年代，在空间技术的发展和数字计算机广泛应用的推动下，随着动态系统优化控制理论的发展，逐渐形成了现代控制理论的一个重要分支——最优控制理论。该理论已广泛应用于空间技术、系统工程、人口理论、经济管理与决策等各个领域，取得了显著的成效。将最优控制理论应用于工业过程控制领域，就得到了具有广泛工程背景的线性二次型最优控制问题（LQG 问题或 H_2 控制问题）。如前所述，以系统的 H_2 范数为性能指标的最优控制理论，可以获得好的动态、稳态性能，但其鲁棒稳定性有时较差（见例4.1.1的分析）。针对上述问题，进入80年代以来，随着鲁棒控制理论的兴起，一方面，产生了使系统具有较强鲁棒性

的 H_∞ 优化控制理论；另一方面，H_2 优化控制理论自身也在不断完善和发展。研究的重点就是围绕如何提高 H_2 控制问题的鲁棒性，其研究方法体现在两个方面，其一是考虑动态系统状态方程中存在参数不确定性，设计状态反馈控制器，使闭环系统稳定且满足 H_2 性能指标，称之为保代价控制；其二是 1989 年 Bernstein 等人提出的 H_2/H_∞ 混合控制问题。H_2/H_∞ 混合控制问题是将 H_2 性能设计与 H_∞ 性能设计相结合，使整个系统既可以获得优良的调节性能，又可以保持鲁棒稳定性。H_2/H_∞ 混合控制实际上是一种多目标控制问题，目前仍处于发展之中。

80 年代初，Zames 等人提出的 H_∞ 优化控制理论，是提高系统鲁棒性的有效途径之一。H_∞ 控制理论的发展大致经历了两个阶段。第一阶段为早期的频域算子理论，其中 Youla 的稳定控制器参数化结果起着核心作用。第二阶段为 80 年代末期发展起来的直接状态空间方法，包括 Riccati 方法和 LMI 方法。线性系统的 H_∞ 控制理论的理论体系目前已基本形成，其应用研究也取得了蓬勃的发展。H_∞ 控制理论应用研究的关键步骤是建立被控系统的数学模型，然后，将该模型化为 H_∞ 标准控制问题所对应的广义被控对象的模型（频域或时域模型），最后，按 H_∞ 标准控制问题的求解方法进行控制器设计。非线性系统的 H_∞ 控制一直是近年来的一个热门研究方向。目前所得到的算法都要涉及到 HJI（Hamilton Jaccobi Issacs）方程的求解，而 HJI 方程的求解是较困难的，只有一些近似解法。因此，本书并未涉及这一问题。90 年代中期之后，时滞系统（包括不确定时滞系统）的 H_∞ 控制问题受到了广泛的关注，取得了大量的研究成果。不依赖于系统时滞大小的（不确定）时滞系统的 H_∞ 控制问题已基本解决，当前的研究热点主要集中在时滞依赖型的 H_∞ 控制问题上，以减小所得结果的保守性。

总之，H_2 和 H_∞ 优化控制理论仍处于不断完善、不断发展之中。可以预言，无论是优化控制理论本身，还是它在工程实际中的应用，都会取得更加辉煌的成果。

第一章 数学基础知识

工科学生在学习鲁棒控制、H_∞ 控制理论中,普遍感到所涉及的数学知识较深、较难。实际上,随着科学的发展,这是不可避免的。作为一种尝试,我们将本书所用到的数学知识罗列成章,重点介绍有关的基本概念和常用的数学推理方法。只要读者专心阅读、细心推演,定能顺利掌握本书的内容。同时也为今后深入学习相关的数学知识打下一定的基础。

本章所选内容都是针对工科学生的具体情况,结合作者在学习过程中的体会而精心挑选的,包括泛函分析中最基本的一些概念、矩阵的奇异值理论、Lyapunov 稳定性理论、线性规划的基本概念以及工科高等数学中没有讲到的集合的上、下确界的概念等。在内容上可能显得多和杂,但我们相信这样做是必要的。因为控制理论对数学的依赖性是非常强的。

1.1 泛函分析基本概念

泛函分析是近代数学的一个重要分支,它将线性代数、线性常微分方程与偏微分方程、积分方程、变分学、逼近论中具有共同特征的问题进行抽象概括,且综合了代数、拓扑和分析结构。近十几年来泛函分析在自动控制理论、最优化理论等方面的应用日益广泛和有效,国内外控制理论方面的论文、专著常引用泛函分析的内容和方法。本节介绍泛函分析的基本概念。

1.1.1 度量空间

度量是实直线 $\mathbf{R}$ 上距离概念在一般抽象集合上的推广。

【定义 1.1.1】 (度量空间与度量) 度量空间是由一非空集合 X 与一度量 d(距离)组成的对(X,d),其中 d 是定义在 $X\times X$ 上的一个函数,且对于任意 $x,y,z\in X$,有:

(M_1) d 是有限的非负实数。

(M_2) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$。

(M_3) $d(x,y)=d(y,x)$。 (对称性)

(M_4) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$。 (三角不等式)

X 的元素 x 称为点。$(\mathrm{M}_1)\sim(\mathrm{M}_4)$是度量公理。注意,在同一集合 X 上可赋予不同的度量,构成不同的度量空间。

【例 1.1.1】 Euclidean 空间 $\mathbf{R}^n$。该空间是由所有 n 个实数的有序组 $x=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$等组成的集合,定义 Euclidean 度量

$$d(x,y)=\left[\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j-\eta_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

可验证度量公理$(\mathrm{M}_1)\sim(\mathrm{M}_4)$成立,则 $\mathbf{R}^n$ 是度量空间。

【例 1.1.2】 有界数列空间 l^∞。取所有有界复数列作为元素组成集合 X,即对 X 里的每个元素 $x=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)$,存在一个实数 C_x,使得

$$|\zeta_j|\leqslant C_x \quad j=1,2,\cdots$$

定义度量

$$d(x,y)=\sup_{j\in N}|\zeta_j-\eta_j|$$

其中 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in X$，$\mathrm{N}=(1,2,\cdots)$。令 $l^\infty=(X,d)$，则 l^∞ 是度量空间。

【例 1.1.3】 空间 $l^P(P\geqslant1)$。l^P 是所有 P 方可和数列所成之集。即，对每个 $x\in(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)\in l^P$，均满足

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j|^P<\infty$$

对于任意 $x=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)\in l^P$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^P$，其度量定义为

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j-\eta_j|^P\right)^{\frac{1}{P}}$$

则 l^P 是度量空间。

1.1.2 开集 闭集 邻域

为了研究度量空间中极限、连续映射等概念，有必要研究度量空间中一些重要点集。

【定义 1.1.2】(球与球面) 设 (X,d) 是一度量空间。$x_0\in X$，实数 $r>0$。称点集

$$B(x_0;r)=\{x\mid x\in X\text{ 且 }d(x,x_0)<r\}$$

为以 x_0 为中心、r 为半径的开球。称点集

$$\widetilde{B}(x_0;r)=\{x\mid x\in X\text{ 且 }d(x,x_0)\leqslant r\}$$

为以 x_0 为中心、r 为半径的闭球。称点集

$$S(x_0,r)=\{x\mid x\in X\text{ 且 }d(x,x_0)=r\}$$

为以 x_0 为中心、r 为半径的球面。

由定义可得

$$S(x_0;r)=\widetilde{B}(x_0;r)-B(x_0;r)$$

在度量空间 (X,d) 中，集合 $M\subset X$ 是有界的当且仅当存在 $x_0\in X$ 与一个正数 r，使得 $M\subset B(x_0;r)$。

开球 $B(x_0;\epsilon)$ 也称为点 x_0 的 ϵ－邻域。如果 $N(\subset M)$ 包含 x_0 的某个 ϵ－邻域，则称做 x_0 的邻域。

【定义 1.1.3】(开集与闭集) 设子集 $G\subset X$，如果 G 是 G 中每一点的邻域，则称 G 是 X 中的开集。若 X 的子集 F，其在 X 中的余集是开集，即 $F^c=X-F$ 是 X 中的开集，则称 F 是 X 中的闭集。

如果度量空间 X 中的集 A 是点 x_0 的领域，则称 x_0 是 A 的内点。A 的内点全体所成之集称为 A 的内部，记做 A° 或 $\mathrm{Int}(A)$。A° 是开的且是 A 中最大的开集。

X 的所有开子集组成的集族 J 具有如下性质。

【定理 1.1.1】 设 J 是度量空间 X 的开子集全体所成之集族，那么

(T_1) $\phi\in J$，$X\in J$。

(T_2) J 中任意多个元素的并集是 J 中的元素。

(T_3) J 中有限个元素之交集是 J 的元素。

将定理 1.1.1 中的性质一般化，给出如下定义。

【定义 1.1.4】(拓扑与拓扑空间) 考虑任一集 X 的子集构成的集族 T，若 T 满足公理 $(T_1)\sim(T_3)$，则称 T 是 X 上的一个拓扑。对于给定拓扑 T 的集合 X 称作拓扑空间，记为 (X,T)。

设 A 是度量空间 X 的子集，$x_0\in X$(x_0 可以是或不是 A 的点)，如果对于任意 $\varepsilon>0$，球 $B(x_0;\varepsilon)$ 里均含有 A 中异于 x_0 的点，则称 x_0 是 A 的聚点。A 的聚点全体与 A 所成之并集称为 A 的闭包，记做 $\overline{A}$。

注意，在 $\mathbf{R}^3$ 中开球 $B(x_0;r)$ 的闭包 $\overline{B(x_0;r)}$ = 闭球 $\widetilde{B}(x_0;r)$。但在一般的度量空间中这一性质不一定成立。

点集的闭包具有下列性质。

【定理 1.1.2】 设 A 是度量空间 X 的子集，则：

(1) A 的闭包 $\overline{A}$ 是闭集。

(2) $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

(3) A 为闭集的充分必要条件是 $A=\overline{A}$。

为使读者加深理解前面介绍的一些概念，我们对定理 1.1.2 证明如下。

【证明】 (1) 记 A 的聚点全体为 D，那么，$\overline{A}=A\cup D$。为证 $\overline{A}$ 是闭集，只须证 $\overline{A}^c$ 是开集。任取 $x\in\overline{A}^c$，则 $x\notin A$ 且 $x\notin D$。必存在 $B(x;\varepsilon)$ 不含 A 的点、且 $B(x;\varepsilon)$ 中的每个点都不是 A 的聚点，即 $B(x;\varepsilon)\subset A^c$ 且 $B(x;\varepsilon)\subset D^c$。因此，$B(x;\varepsilon)\subset\overline{A}^c$。故 $\overline{A}^c$ 是开集，也即 $\overline{A}$ 是闭集。

(2) 设 F 是包含 A 的任意闭集，往证 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集，只须证 $\overline{A}\subset F$。首先证明 F 的聚点均是 F 的点。反证法。若有 F 的聚点 $x_0\notin F$，则 $x_0\in F^c$，因 F^c 为开集，必存在 $B(x_0;\varepsilon)\subset F^c$，于是，$B(x_0;\varepsilon)$ 不含 F 中的点，这与 x_0 是 F 的聚点矛盾。因此，F 的聚点均在 F 中。由于 $A\subset F$，根据聚点之定义知，A 的聚点均是 F 的聚点，从而 A 的聚点都在 F 中，故 $\overline{A}\subset F$。由(1)知 $\overline{A}$ 是闭集，即证得 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

(3) 必要性。若 A 是闭集，则由(2)知，$\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集。因此，$\overline{A}\subset A$，故 $A=\overline{A}$。

充分性。若 $A=\overline{A}$，由(1)知 $\overline{A}$ 是闭集，所以 A 是闭集。 **证毕**

【定义 1.1.5】(稠密集) 设 M 是度量空间 X 的子集，如果

$$\overline{M}=X$$

则称 M 在 X 中稠密。即如果 M 在 X 中稠密，那么，X 里的每个球不论半径怎样小，都含有 M 中的点。

例如，有理数集在实数集合中是稠密的。

1.1.3 收敛 Cauchy 序列 完备性

在度量空间 (X,d) 中，利用度量 d 来定义序列的收敛。

【定义 1.1.6】(收敛与极限) 设 (x_n) 是度量空间 (X,d) 中的序列，若存在 $x\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$$

则称 (x_n) 收敛。且 x 称为 (x_n) 的极限。记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。若 (x_n) 不收敛，就称其发散。

【定义 1.1.7】(Cauchy 序列与完备性) 设 (X,d) 是度量空间，(x_n) 是 X 中的序列。如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)>0$，当 $m,n>N$ 时，有

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

则称(x_n)为 Cauchy 序列(或基本序列)。如果 X 中的每个 Cauchy 序列均收敛于 X 中的点,则称 X 是完备的。

实直线 **R** 和复平面 **C** 是完备的度量空间。但去掉实直线 **R** 上的一个点 a,得到不完备的空间 $\mathbf{R}-\{a\}$。可以证明,1.1.1 节提到的 Euclidean 空间 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{C}^n$ 是完备的,有界数列空间 l^∞ 是完备的,空间 $l^P(P\geqslant 1)$是完备的,还可以证明,任一非完备空间均可使其完备化。

1.1.4 赋范空间 Banach 空间

为使度量空间中的度量与向量空间中的代数运算结合起来,我们在向量空间上建立向量的范数,它是向量模概念的推广。并由范数定义向量空间的度量,从而产生了赋范空间,若在这种度量下赋范空间是完备的,则称为 Banach 空间。

【定义 1.1.8】(赋范空间与 Banach 空间) 设 X 是数域 K 上的向量空间,在 X 上定义映射 $X\to\mathbf{R}: x\mapsto\|x\|$,对于任意 $x,y\in X$, $a\in K$ 满足:

(N_1) $\|x\|\geqslant 0$。

(N_2) $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=\theta$。

(N_3) $\|ax\|=|a|\,\|x\|$。

(N_4) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$。

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数。称$(x,\|\cdot\|)$为赋范空间。在 X 上定义度量

$$d(x,y)=\|x-y\| \tag{1.1.1}$$

称为由范数导出的度量。若 X 在度量式(1.1.1)下是完备的,则称 X 是 Banach 空间。

【例 1.1.4】 Euclidean 空间 $\mathbf{R}^n$ 及酉空间 $\mathbf{C}^n$。对于 $x=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$,定义范数

$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{|\zeta_1|^2+\cdots+|\zeta_n|^2} \tag{1.1.2}$$

可验证$(N_1)\sim(N_4)$成立。由范数导出的度量是

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{|\zeta_1-\eta_1|^2+\cdots+|\zeta_n-\eta_n|^2}$$

其中 $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$。由上小节知,在此度量下,$\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 是完备的,因此,$\mathbf{R}^n$、$\mathbf{C}^n$ 均是 Banach 空间。

【例 1.1.5】 空间 $l^P(P\geqslant 1)$。在 l^P 上定义范数

$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j|^P\right)^{\frac{1}{P}},\ x=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)\in l^P \tag{1.1.3}$$

易验证式(1.1.3)满足范数公理$(N_1)\sim(N_4)$。由式(1.1.3)导出的度量是

$$d(x,y)=\|x-y\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j-\eta_j|^P\right)^{\frac{1}{P}}$$

l^P 在这个度量下是完备的,故 l^P 是 Banach 空间。

【例 1.1.6】 空间 l^∞ 是 Banach 空间。容易证明

$$\|x\|=\sup_j|\zeta_j|,\ x=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)\in l^\infty$$

是 l^∞ 上向量的范数,且度量

$$d(x,y)=\sup_j|\zeta_j-\eta_j|,\ x=(\zeta_1,\zeta_2\cdots),\ y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^\infty$$

是由这个范数导出的。l^∞ 是完备的。

【定义 1.1.9】(等价范数) 设 X 是向量空间，$\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_0$ 是 X 上的两个范数，如果存在正数 a 和 b，使得对所有 $x\in X$，有

$$a\|x\|_0\leqslant\|x\|\leqslant b\|x\|_0$$

则称范数 $\|\cdot\|$ 与范数 $\|\cdot\|_0$ 等价。

【定理 1.1.3】 在有穷维向量空间 X 上，任何两个范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_0$ 都是等价的。

【定义 1.1.10】(紧性) 设 X 是度量空间，如果 X 中的每个序列都有一个收敛的子序列，则称 X 是紧空间。设子集 $M\subset X$，若 M 是 X 的紧子空间，即 M 中的每个序列都有一个收敛的子序列，其极限是 M 中的一个元素，则称 M 是紧集。

引进紧性概念的目的在于有穷维赋范空间及其子空间的一些基本性质是与紧性有关的。

【定理 1.1.4】 在有穷维赋范空间 X 中，任意子集 M 为紧的充分必要条件是 M 为有界闭集。

例如，$\mathbf{R}$ 中的区间 $(0,1)$ 是非紧集。$\mathbf{R}$ 中的自然数集 $\{1,2,\cdots\}$ 也是非紧集。而区间 $[0,1]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集。

【定义 1.1.11】(线性算子) 设 X、Y 是同一数域 K 上的两个向量空间，如果算子 T 满足：

(1) T 的定义域 $D(T)$ 是 X 的向量子空间，T 的值域 $R(T)$ 包含在 Y 中。

(2) 对于所有 x、$y\in D(T)$，任意 $\alpha\in K$，有

$$\begin{cases}T(x+y)=Tx+Ty\\ T(\alpha x)=\alpha Tx\end{cases}\tag{1.1.4}$$

成立，则称 T 是线性算子。

公式(1.1.4)等价于

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,x,y\in D(T),\alpha,\beta\in K$$

【定义 1.1.12】(有界线性算子) 设 X、Y 是同一数域 K 上的赋范空间，$T:D(T)\to Y$ 是线性算子，$D(T)\subset X$，如果存在常数 $c>0$，使得对一切 $x\in D(T)$，有

$$\|Tx\|_Y\leqslant c\|x\|_X\tag{1.1.5}$$

或简记为 $\|Tx\|\leqslant c\|x\|$。那么，称 T 是有界线性算子。否则，称 T 为无界算子。

有界线性算子的定义与微积分中函数有界的定义是不一致的。有界函数是指值域有界而言。这里的有界线性算子是指 $D(T)$ 中的有界集，其像在 Y 中亦为有界集的那种算子。例如，$f(x)=x$ 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的有界线性算子，但不是 $\mathbf{R}$ 上的有界函数。

由式(1.1.5)，有 $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant c(x\neq\theta)$。因此，数集

$$\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\,\middle|\,x\in D(T),x\neq\theta\right\}$$

存在上确界，且 $\sup\limits_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq\theta}}\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}<\infty$，将此数定义成算子 T 的范数，即

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq\theta}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\tag{1.1.6}$$

如果 $D(T)=\{\theta\}$，我们定义 $\|T\|=0$，此时，$T=0$。

由式(1.1.6)，得 $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant\|T\|$，从而，有

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|,x\in D(T)$$

对于 $x,y\in D(T)$，利用下列不等式

$$\|T\| = \sup_{x\neq\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{\substack{x\neq\theta\\ \|x\|\leqslant 1}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| \geqslant$$

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\| = \sup_{y\neq\theta}\left\|T\frac{y}{\|y\|}\right\| = \|T\|$$

从而，得

$$\|T\| = \sup_{x\neq\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| \tag{1.1.7}$$

【定义 1.1.13】(线性泛函) 从向量空间 X 的子空间 $D(f)$ 到 X 的数域 K 的线性算子 f 称做线性泛函。$D(f)$ 称做 f 的定义域。f 的值域记做 $R(f) = \{f(x) \mid x\in D(f)\}$。

从以上定义可看出，泛函是值域位于实数域或复数域的算子。

【定义 1.1.14】(有界线性泛函) 设 X 是数域 K 上的赋范空间，f 是从 $D(T)\subset X$ 到 K 的线性算子，如果存在 $c>0$，使得对于所有 $x\in D(T)$，有

$$|f(x)| \leqslant c\|x\| \tag{1.1.8}$$

则称 f 是有界线性泛函。

$f: D(f)\to K$ 的范数定义为

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in D(f)\\ x\neq\theta}}\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in D(f)\\ \|x\|=1}}|f(x)| \tag{1.1.9}$$

由式(1.1.9)可得

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|,\ \forall x\in D(T)$$

【例 1.1.7】 空间 $C[a,b]$。选固定的 $f_0\in J=[a,b]$，由

$$f_0(x) = x(t_0) \quad x(t)\in[a,b]$$

定义的泛函 $f_0: C[a,b]\to\mathbf{R}$ 是线性、有界的，且 f_0 的范数为 $\|f_0\| = 1$。

【证明】 显然 f_0 是线性的，只证 f_0 有界。由

$$|f_0(x)| = |x(t_0)| \leqslant \|x\| \quad \forall x\in C[a,b]$$

知 f_0 有界且 $\|f_0\|\leqslant 1$。另一方面，取 $x_0=1$，得 $\|x_0\|=1$，$\|f_0\|\geqslant|f_0(x_0)|=1$，因此，$\|f_0\|=1$。 证毕

1.1.5 内积空间 Hilbert 空间

内积空间是特殊的赋范空间(引进了新的结构——内积)，是 Euclidean 空间的自然推广，其核心概念是直交，由此产生了投影定理。

【定义 1.1.15】(内积空间 Hilbert 空间) 设 X 是数域 K(R 或 C)上的向量空间，如果映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X\to K$，$\forall x,y,z\in X$，及每个 $\alpha\in K$，满足：

(IP_1) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$。

(IP_2) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$。

(IP_3) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$，$\langle x,x\rangle\geqslant 0$。

(IP_4) $\langle x,x\rangle = 0$ 当且仅当 $x=\theta$。

则称 $\langle x,y\rangle$ 为 x,y 的内积。X 称为内积空间。完备的内积空间称为 Hilbert 空间(度量由式(1.1.12)定义)。

由(IP_1)~(IP_3)得：

(1) $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$。

(2) $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$。

(3) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$。

【定理 1.1.5】 设 X 是内积空间,则 $\forall x, y \in X$,有

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \tag{1.1.10}$$

不等式(1.1.10)称为 Schwarz 不等式。

在内积空间 X 中,$\forall x \in X$,定义范数

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{1.1.11}$$

式(1.1.11)满足(N_1)和(N_2)。由(IP_2)与(IP_3)有 $\| \alpha x \| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = |\alpha| \| x \|$,即($N_3$)成立。由 Schwarz 不等式,得

$$\| x + y \|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \| x \|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \| y \|^2 \leqslant \| x \|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \| y \|^2 \leqslant \| x \|^2 + 2\| x \| \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2$$

因此,$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$。($N_4$)成立,故式(1.1.11)是 X 上的范数。

由此可见,内积空间必为赋范空间,其由范数导出的度量为

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} \tag{1.1.12}$$

【定理 1.1.6】 设 X 是内积空间,$\| \cdot \|$ 是由内积通过式(1.1.11)定义的范数,则 $\forall x, y \in X$,有

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) \tag{1.1.13}$$

式(1.1.13)称做平行四边形等式。

1.1.6 直交与直交分解

在赋范空间中,从元素 x 到一非空子集 $M \subset X$ 的距离 δ 定义为

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \| x - \tilde{y} \|$$

问题:M 中是否惟一存在元素 y,使得

$$\delta = \| x - y \|$$

关于 y 的存在性和惟一性问题,在一般的赋范空间中较复杂,但在 Hilbert 空间中,相对较为简单。

设 x、y 是向量空间 X 中给定的二向量,称集

$$\{z \mid z \in X, z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$$

为连结 x、y 的线段。

设 M 是 X 的子集,如果 $\forall x, y \in M$ 连结 x、y 的线段均包含在 M 中,则称 M 为凸集。

【定理 1.1.7】(极小化向量) 设 X 是内积空间,$M \neq \phi$ 为 X 的完备凸子集,则 $\forall x \in X$,存在惟一的 $y \in M$,使得

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \| x - \tilde{y} \| = \| x - y \|$$

【定义 1.1.16】(直交) 设 x、y 是内积空间 X 中的两个向量,如果

$$\langle x, y\rangle = 0$$

则称 x 与 y 直交,记做 $x \perp y$。对于子集 A、$B \subset X$,若 x 与所有 $a \in A$ 直交,称 x 与 A 直交,记做 $x \perp A$。如果 $\forall a \in A$,$\forall b \in B$,均有 $a \perp b$,则称 A 与 B 直交,记做 $A \perp B$。称集

$$A^{\perp} = \{x \mid x \in X, x \perp A\}$$

为 A 的直交补。

【定理 1.1.8】(直交性) 设 Y 是内积空间 X 的子空间,对于给定的 $x \in X$,如果存在 $y \in Y$,使得

$$\| x - y \| = \delta = \inf_{\tilde{y} \in Y} \| x - \tilde{y} \|, \text{则}, x - y \perp Y$$

【定义 1.1.17】(直和) 设 X 是向量空间,Y, Z 是 X 的两个子空间。若 $\forall x \in X$ 可惟一地表示成

$$x = y + z, y \in Y, z \in Z$$

则称 X 为 Y 与 Z 的直和,记做 $X = Y \oplus Z$。如果 $Y \perp Z$,则 $X = Y \oplus Z$ 称做 Y 与 Z 的直交和。

【定理 1.1.9】(直交和) 设 Y 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间,则

$$H = Y \oplus Y^{\perp}$$

即 $\forall x \in H$,可惟一地表示成

$$x = y + z, y \in Y, z \in Y^{\perp} \tag{1.1.14}$$

式(1.1.14)中的 y 称做 x 在子空间 Y 上的直交投影。

定理 1.1.9 亦称做投影定理,定义映射

$$P: H \to Y、P: x \mapsto y = Px$$

P 称为 H 到 Y 的投影算子。P 具有下述性质:

(1) P 的范数或是 0,或是 1。

(2) P 必是有界线性算子。

(3) P 是等幂的:$P^2 = P$。

(4) P 的零空间等于 Y 的直交补:$N(P) = Y^{\perp}$。

1.2 几种函数空间

本节介绍 H_2、H_∞ 控制理论中涉及到的几种函数空间。

1.2.1 时域函数空间

1. $L_2(-\infty, +\infty)$:所有平方可积函数 $x(t): \mathbf{R} \to \mathbf{C}^n$ 所构成的函数空间,即对于 $x(t) \in \mathbf{C}^n$ $(-\infty < t < +\infty)$,有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| x(t) \|^2 dt < +\infty$$

其中 $\| \cdot \|$ 为 Euclidean 范数,积分为 Lebesgue 积分。

在 $L_2(-\infty, +\infty)$ 上定义内积:$x(t), y(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, y(t) dt \tag{1.2.1}$$

这使 $L_2(-\infty, +\infty)$ 成为 Hilbert 空间。由内积导出的范数为

$$\| x(t) \| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, x(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2.2}$$

这样 $L_2(-\infty, +\infty)$ 按此范数成为一个 Banach 空间。

$L_2[0,+\infty)$:所有对于 $t<0$ 除在测度为 0 的集合上(即对几乎所有 $t<0$)均为 0 的 $L_2(-\infty,+\infty)$内的函数全体所构成的集合。$L_2[0,+\infty)$为 $L_2(-\infty,+\infty)$的一个闭子空间，其直交补记为 $L_2(-\infty,0]$。因此

$$L_2(-\infty,+\infty)=L_2(-\infty,0]\oplus L_2[0,+\infty)$$

2. $L_2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{m\times n})$:所有 $\mathbf{R}\to\mathbf{C}^{m\times n}$且满足下式的函数矩阵 $X(t)$的集合

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{trace}(X^*(t)\ X(t))\mathrm{d}t<+\infty$$

在 $L_2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{m\times n})$上定义内积及导出范数依次为

$$\langle X(t),Y(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{trace}(X^*(t)\ Y(t))\mathrm{d}t \tag{1.2.3}$$

$$\|X(t)\|=\langle X(t),X(t)\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{1.2.4}$$

这样 $L_2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{m\times n})$按此内积(范数)成为 Hilbert 空间(Banach 空间)。

1.2.2 频域函数空间

1. L_2:所有对 ω(Lebesque)平方可积的复向量函数 $x(\mathrm{j}\omega)$: $\mathrm{I\!R}\to\mathbf{C}^n$ 全体所成的空间，即满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^*(\mathrm{j}\omega)x(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega<\infty$$

定义内积和相应的导出范数为

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x^*(\mathrm{j}\omega)y(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega,\ \forall\ x,y\in L_2 \tag{1.2.5}$$

$$\|x(\mathrm{j}\omega)\|_2=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{1.2.6}$$

这样 L_2 按上述内积(范数)成为 Hilbert(Banach)空间。

RL_2:定义 RL_2 空间为

$$RL_2=\{x\mid x\in L_2,x\ \text{为实有理函数向量}\}$$

RL_2 是 L_2 的一个稠密子空间，故 RL_2 不会按上面定义的内积(范数)成为 Hibert(Banach)空间(非完备性)。

2. H_2: H_2 是在开右半 s 平面 $\mathrm{Re}\ s>0$ 上解析，在 $\mathbf{C}^n$ 上取值，且满足如下一致平方可积函数向量 $x(s)$的全体所构成的空间

$$\left[\sup_{\zeta>0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|x(\zeta+\mathrm{j}\omega)\|^2\mathrm{d}\omega\right]^{\frac{1}{2}}<\infty$$

定义上式左端 $=\|x(s)\|_2$。那么，H_2 按此范数成为 Banach 空间。

H_2 空间实际上是 $p=2$ 时的 Hardy 赋范空间 H_p 的特例。

【定理 1.2.1】 设 $x\in H_2$，则对几乎所有的 ω，极限

$$\hat{x}(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\zeta\to0}x(\zeta+\mathrm{j}\omega) \tag{1.2.7}$$

存在，且 $\hat{x}\in L_2$。而且映射 $x\to\hat{x}$是 $H_2\to L_2$ 的线性单射的保范映射。$f(x)$为单射：若 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$，映射 $x\to\hat{x}$保范：$\|x\|_2=\|\hat{x}\|_2$，即映射前后范数保持不变。

由定理 1.2.1 可知，虽然 $x\in H_2$ 在虚轴上无定义，但可将其延拓到 L_2 中的边界函数 $\hat{x}$，从

而，将 H_2 视为 L_2 的一个闭子空间。

$H_2^{\perp}$：H_2 在 L_2 内的直交补空间。其定义只需在上述 H_2 定义中，将 $\zeta>0$ 改为 $\zeta<0$。

RH_2：$RH_2=\{x \mid x\in H_2, x$ 为实有理函数向量$\}$。

$RH_2^{\perp}$：RH_2 在 RL_2 中的直交补空间。

$$L_2 = H_2 \oplus H_2^{\perp}$$

$$RL_2 = RH_2 \oplus RH_2^{\perp}$$

显然，RH_2 为在 $\text{Re } s\geqslant 0$ 内无极点(解析)的严格正则实有理函数向量全体所成之集。

【例 1.2.1】 令 $f(s)=\dfrac{2}{(s+1)(s-1)}$，则 $f\in RL_2$，做分解

$$f(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}=g_1(s)+g_2(s)$$

其中

$$g_1(s)=\frac{1}{s-1}\in RH_2^{\perp}$$

$$g_2(s)=-\frac{1}{s+1}\in RH_2$$

3. L_∞：由 $\mathrm{j}\mathbf{R}\to\mathbf{C}^{m\times n}$，且满足

$$\sup_{\omega}\bar{\sigma}[\boldsymbol{F}(\mathrm{j}\omega)]<\infty$$

的函数矩阵 $\boldsymbol{F}(\mathrm{j}\omega)$ 全体所成之空间。一般地，$\boldsymbol{A}$ 的最大奇异值 $\bar{\sigma}(\boldsymbol{A})$ 定义为

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{A})=\max_i\{\lambda_i[\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}]\}^{\frac{1}{2}}$$

在 L_∞ 中定义范数

$$\|\boldsymbol{F}\|_\infty = \sup_{\omega}\bar{\sigma}[\boldsymbol{F}(\mathrm{j}\omega)] \tag{1.2.8}$$

则此空间成为 Banach 空间。

4. H_∞：由 $\mathbf{C}\to\mathbf{C}^{m\times n}$，且满足

$$\sup\{\bar{\sigma}[\boldsymbol{F}(s)] \mid \text{Re } s>0\}<\infty$$

的函数矩阵 $\boldsymbol{F}(s)$ 全体所构成的空间。定义范数

$$\|\boldsymbol{F}\|_\infty = \sup\{\bar{\sigma}[\boldsymbol{F}(s)] \mid \text{Re } s>0\} \tag{1.2.9}$$

H_∞ 空间实际上是 $p=\infty$ 时的 Hardy 空间 H_p 的特例。

类似于定理 1.2.1，可将 H_∞ 中的函数矩阵延拓到虚轴上。从而，H_∞ 为 L_∞ 的一个闭子空间。

类似于 RH_2，可定义 RH_∞ 空间。

在 L_∞ 和 RL_∞ 中无内积定义，故无直交的概念。因此，称 $H_\infty^{\perp}(RH_\infty^{\perp})$ 为 $H_\infty(RH_\infty)$ 的补空间。有关系式

$$L_\infty = H_\infty + H_\infty^{\perp}$$

$$RL_\infty = RH_\infty + RH_\infty^{\perp}$$

易知，RH_∞ 是由在 $\text{Re } s\geqslant 0$ 内无极点的正则实有理函数矩阵全体构成的空间。

【例 1.2.2】 令

$$f(s)=\frac{(s-2)(s+2)}{(s-1)(s+1)}$$

则 $f(s)\in RL_\infty$，但 $f(s)\notin RL_2$(非严格正则)，做分解

$$f(s)=\frac{s+2.5}{s+1}-\frac{1.5}{s-1}=g_1(s)+g_2(s)$$

其中

$$g_1(s)=\frac{s+2.5}{s+1}\in RH_\infty$$

$$g_2(s)=-\frac{1.5}{s-1}\in RH_\infty^\perp$$

2 - 范数与 ∞ - 范数之间的关系:

(1) 若 $F\in L_\infty$,则 $FL_2\subset L_2$,且

$$\|F\|_\infty=\sup[\|Fx\|_2\mid x\in L_2,\|x\|_2=1]=\sup[\frac{\|Fx\|_2}{\|x\|_2}\mid x\in L_2,\|x\|_2\neq 0] \quad (1.2.10)$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 为 L_2 上的范数。

(2) 若 $F\in H_\infty$,则 $FH_2\subset H_2$,且

$$\|F\|_\infty=\sup[\|Fx\|_2\mid x\in H_2,\|x\|_2=1]=\sup[\frac{\|Fx\|_2}{\|x\|_2}\mid x\in H_2,\|x\|_2\neq 0] \quad (1.2.11)$$

正是因为存在上述关系,我们称∞ - 范数为 2 - 范数的导出范数。

【定理 1.2.3】 设 $U(\mathrm{j}\omega)$为 $u(t)$的 Fourier 变换的像函数,如果 $u(t)\in L_2(-\infty,+\infty)$,则 $U(\mathrm{j}\omega)\in L_2$,且

$$\|u(t)\|_2=\|U(\mathrm{j}\omega)\|_2 \quad (1.2.12)$$

其中

$$\|u(t)\|_2^2=\int_{-\infty}^{\infty}\|u(t)\|^2\mathrm{d}t$$

$$\|U(\mathrm{j}\omega)\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|U(\mathrm{j}\omega)\|^2\mathrm{d}\omega$$

【证明】 设 $u,v\in L_2(-\infty,+\infty)$,$U$、$V$ 分别为其 Fourier 变换的像函数。由内积定义,有

$$\langle u,v\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}u^*(t)v(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}u^*(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}u^*(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]V(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U^*(\mathrm{j}\omega)V(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega=\langle U,V\rangle$$

令 $u(t)=v(t)$,得

$$\|u(t)\|_2^2=\langle u,u\rangle=\langle U,U\rangle=\|U(\mathrm{j}\omega)\|_2^2$$ 证毕

等式(1.2.12)称为 Parseval 等式。它给出了时域信号的 2 - 范数(能量)与频域函数 2 - 范数之间的关系。

令 $X(s)\in H_2$(L_2 的子空间)的 Laplace 逆变换为 $x(t)$,则由 Parseval 等式(1.2.12)可知 $\|x\|_2^2$是时域信号 $x(t)$的能量。若令 $F(s)\in H_\infty$为一系统的传函矩阵,而 $y=Fx$ 为其输出,则由式(1.2.11)

$$\|F\|_\infty=\sup\left[\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2}\middle|x\in H_2,\|x\|_2\neq 0\right]$$

因此,$\|F\|_\infty$的物理意义是传函矩阵为 F 的系统的能量放大系数。

1.3 奇异值及奇异值分解

【定义 1.3.1】(厄米特、酉阵) 具备 $M = M^*$ 这一性质的矩阵 M 称为厄米特(Hermitian)阵(实对称阵)。具备 $Q^* = Q^{-1}$ 这一性质的矩阵 Q 称为酉(Unitary)阵(正交阵)。

【定理 1.3.1】 厄米特阵 M 的所有特征值均为实数。

【定理 1.3.2】 对任一厄米特阵 M,存在一个酉阵 Q,使得

$$\hat{M} = QMQ^* = QMQ^{-1} \tag{1.3.1}$$

其中 $\hat{M}$ 是以 M 的实特征值为对角元的对角阵。

设 H 是 $m \times n$ 阵,则矩阵 H^*H 是阶数为 n 的方阵,HH^* 是阶数为 m 的方阵。$H^*H \geqslant 0, HH^* \geqslant 0$ 分别为厄米特阵,故其特征值均为非负实数,且有

$$\operatorname{rank}(H^*H) = \operatorname{rank}(HH^*) = \operatorname{rank}(H) \tag{1.3.2}$$

若 $\operatorname{rank}(H) = r$,则可证 $\lambda_i(H^*H) = \lambda_i(HH^*) > 0, i = 1,2,\cdots,r$。而 H^*H 的其余 $n-r$ 个特征值和 HH^* 的其余 $m-r$ 个特征值均为零。

【定义 1.3.2】(奇异值) 令 $\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 是 H^*H 的特征值,数组 $\{\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n\}$ 称为 H 的奇异值。

实际上,矩阵的奇异值是复数标量绝对值概念的推广。事实上,对复数 a,有

$$a^* a = aa^* = |a|^2$$

【定理 1.3.3】(奇异值分解) 任一秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵 H 能被变换成

$$R^* HQ = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad H = R\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^* \tag{1.3.3}$$

其中 $R^*R = RR^* = I_m$ 及 $Q^*Q = QQ^* = I_n$ 以及 $\Sigma = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r\}$,$\sigma_i (i = 1,2,\cdots,r)$ 为 H 的 r 个非 0 奇异值,并且 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$。

【证明】 排列 $\{\lambda_i, i = 1,2,\cdots,n\}$,使得

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$$

由式(1.3.2)知,H 的秩为 r,则 H^*H 的秩也是 r。因此有 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0, \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0$。设 $q_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 是 H^*H 之对应着 λ_i 的正交规范特征向量,定义

$$Q = [q_1, q_2, \cdots, q_r, \vdots\, q_{r+1}, \cdots, q_n] = [Q_1 \,\vdots\, Q_2] \tag{1.3.4}$$

由定理 1.3.2,有

$$Q^* H^* HQ = \begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3.5}$$

其中 $\Sigma^2 = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r\}$。利用式(1.3.4),式(1.3.5)能写成

$$Q_2^* H^* HQ_2 = 0 \tag{1.3.6}$$

和

$$Q_1^* H^* HQ_1 = \Sigma^2$$

这意味着

$$\Sigma^{-1} Q_1^* H^* HQ_1 \Sigma^{-1} = I \tag{1.3.7}$$

其中 $\Sigma = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r\}$。定义 $m \times r$ 矩阵 R_1 为

$$R_1 = HQ_1 \Sigma^{-1} \tag{1.3.8}$$

则方程(1.3.7)成为 $R_1^* R_1 = I$,即 R_1 的各列是规范正交的。选择 R_2,使得 $R = [R_1 \quad R_2]$ 是

一酉阵。考虑

$$R^*HQ=\begin{bmatrix}R_1^*\\R_2^*\end{bmatrix}H[Q_1\quad Q_2]=\begin{bmatrix}R_1^*HQ_1 & R_1^*HQ_2\\R_2^*HQ_1 & R_2^*HQ_2\end{bmatrix}\tag{1.3.9}$$

由式(1.3.8)得 $HQ_1=R_1\Sigma$,由式(1.3.6),得 $HQ_2=0$。又因为 R 是正交规范的,故有 $R_1^*R_1=I$及$R_2^*R_1=0$。因此,式(1.3.9)成为

$$R^*HQ=\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\0 & 0\end{bmatrix}_{m\times n}$$

证毕

注　虽然 Σ 能由 H 惟一地确定,但酉阵 R 和 Q 不一定是惟一的。

矩阵奇异值的性质:设 $A\in C^{n\times m}$

(1) $A^*A\leqslant\bar{\sigma}^2(A)\cdot I_m,AA^*\leqslant\bar{\sigma}^2(A)\cdot I_n$。

(2) $\underline{\sigma}(A)\leqslant|\lambda_i(A)|<\bar{\sigma}(A)$。

(3) $\bar{\sigma}(A)=\max\limits_{x\neq0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max\limits_{\substack{x\neq0\\\|x\|=1}}\|Ax\|$,$\underline{\sigma}(A)=\min\limits_{x\neq0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}=\min\limits_{\substack{x\neq0\\\|x\|=1}}\|Ax\|$。

其中,$\bar{\sigma}(A)$表示 A 的最大奇异值,$\underline{\sigma}(A)$表示最小奇异值,$\|x\|=\sqrt{x^*x}$。

(4) $\bar{\sigma}(A)\leqslant1$ 当且仅当 $I-A^*A\geqslant0$ 或 $I-AA^*\geqslant0$。

(5) A 满秩当且仅当$\underline{\sigma}(A)>0$。

(6) 如果 A 可逆,则 $\bar{\sigma}(A)=\underline{\sigma}(A^{-1})$。

(7) 对于标量 $\beta\in C$,有 $\sigma_i(\beta A)=|\beta|\sigma_i(A)$。

(8) 设 $A_1,A_2\in C^{n\times m}$,则

$$\bar{\sigma}(A_1+A_2)\leqslant\bar{\sigma}(A_1)+\bar{\sigma}(A_2)$$

(9) 设 $A\in C^{n\times q},B\in C^{q\times m}$,则

$$\bar{\sigma}(AB)\leqslant\bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)$$
$$\underline{\sigma}(AB)\geqslant\underline{\sigma}(A)\underline{\sigma}(B)$$

(10) 设 A 可分块表示为

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

则 $\bar{\sigma}(A)\geqslant\bar{\sigma}(A_{ij}),i,j=1,2$。

【例 1.3.1】　有矩阵

$$H=\begin{bmatrix}9 & -8 & 0\\j12 & j6 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

本例 $m=4,n=3,r=2$,可求得

$$\Sigma=\begin{bmatrix}15 & 0\\0 & 10\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 0\\j\frac{4}{5} & j\frac{3}{5} & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

关于奇异值分解的用途，读者可参阅文献[4]的附录 A6。

1.4 Lyapunov 稳定性理论

稳定性是控制系统应具备的最重要的特性，在设计控制系统时，首先要考虑它的稳定性。本节我们将给出以状态空间描述的动态系统在 Lyapunov 意义下的稳定性的概念、定义及主要判据。

1.4.1 稳定性定义

考虑如下非线性微分方程描述的动态系统

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t)),x(t_0)=x_0,t\geqslant t_0 \tag{1.4.1}$$

该系统称为自由系统(无外输入作用)。其中 $x\in\mathbf{R}^n$，为状态向量，$f(t,x)$为关于 t 分段连续且满足 Lipschitz 条件的 n 维向量函数。即存在常数 $K>0$，使得对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^n$，有

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|<K\|x_1-x_2\| \tag{1.4.2}$$

可以证明，在上述条件下，式(1.4.1)中的微分方程在任意初始条件 $x(t_0)=x_0$ 下，在任意区间 $[t_0,t],t\geqslant t_0$ 上有惟一解

$$x(t)=x(t;x_0,t_0),t\geqslant t_0 \tag{1.4.3}$$

对于微分方程(1.4.1)，如果存在 $x_e\in\mathbf{R}^n$，使得

$$\dot{x}_e=f(t,x_e)=\mathbf{0},\forall t\geqslant t_0 \tag{1.4.4}$$

则 x_e 为方程(1.4.1)的定常解，称为系统或微分方程(1.4.1)的平衡点。

【定义 1.4.1】 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得对于任意满足

$$\|x_0-x_e\|\leqslant\delta(t_0,\varepsilon)$$

的初始条件 x_0，方程(1.4.1)的解(1.4.3)满足

$$\|x(t,x_0;t_0)-x_e\|\leqslant\varepsilon,\forall t\geqslant t_0 \tag{1.4.5}$$

则称平衡点 x_e 是稳定的，如果 $x_e=\mathbf{0}$，则称原点是稳定的。

在以上定义中，如果 $\delta=\delta(\varepsilon)$，即与 t_0 无关，则称平衡点 x_e 是一致稳定的。对于线性定常系统，x_e 的稳定与一致稳定是等价的。

以下为简便起见，取方程(1.4.1)的平衡点 $x_e=\mathbf{0}$。这样做对线性系统并不失一般性。

【定义 1.4.2】 如果平衡点 $x_e=\mathbf{0}$ 是稳定的，且

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t;x_e,t_0)\|=0 \tag{1.4.6}$$

则称平衡点 $x_e=\mathbf{0}$ 是渐近稳定的。

【定义 1.4.3】 如果 $x_e=\mathbf{0}$ 是渐近稳定的，且存在正数 $\alpha>0$ 和 $\lambda>0$，使得

$$\|x(t;x_0,t_0)\|\leqslant\alpha e^{-\lambda(t-t_0)},\forall t\geqslant t_0 \tag{1.4.7}$$

成立，则称 $x_e=\mathbf{0}$ 是指数稳定的。

值得注意的是上述定义中的稳定性均为局部特性，即式(1.4.5)～(1.4.7)只要求对于满足 $\|x_0\|<\delta(\varepsilon)$的初始条件 x_0 成立。一般我们有如下定义。

【定义 1.4.4】 如果从系统(1.4.1)的任一有限非零初始状态 x_0 出发的轨迹 $x(t;x_0,t_0)$ 都是有界的，且成立

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t;x_0,t_0)\|=0 \tag{1.4.8}$$

则称平衡点 $x_e=0$ 是全局(大范围)渐近稳定的。

由定义,系统为全局渐近稳定的必要条件为,除原点处平衡点以外,不存在其它孤立平衡点。需注意的是,对于线性系统,渐近稳定性意味着全局渐近稳定性。

1.4.2 稳定性判据

由定义判断系统的稳定性,需要解系统的状态变量。下面将要讨论的 Lyapunov 第二方法不需要求出状态方程的解而直接判断解的稳定性,因而又称为直接法。

为简便计,下面讨论定常系统的稳定性条件,即方程(1.4.1)可以表示为

$$\dot{x}(t)=f(x(t)),f(0)=0 \tag{1.4.9}$$

对于一般的时变系统相应的结果,读者可参阅有关文献。

【定义 1.4.5】 如果存在标量函数 $V(x)>0$ ($V(0)=0$)对 x 可微,沿方程(1.4.9)解轨迹的导数连续,且满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}f(x(t))\leqslant 0,\forall t \tag{1.4.10}$$

其中

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}$$

则称 $V(x(t))$是方程(1.4.9)平衡点 $x_e=0$ 的 Lyapunov 函数。

由定义可知,正定函数 $V(x)$可解释为系统的"能量函数"。如果能找到一个"能量函数",沿方程(1.4.9)的解轨迹,随时间是不增的,则 $x_e=0$ 是稳定的平衡状态。

【引理 1.4.1】[19] 设 $U\subset\mathbf{R}^n$ 为原点 $x=0$ 的一个邻域。连续的实函数 $V(x)$ 对于任意的 $x\in U$ 为正定的充分必要条件为存在满足如下条件的严格单调增函数 $\alpha(\tau)$和 $\beta(\tau)$。

(1) $\alpha(0)=\beta(0)=0$。

(2) $\alpha(\|x\|)\leqslant V(x)\leqslant\beta(\|x\|)$。

【定理 1.4.1】 对于定常系统(1.4.9),如果在平衡点 $x_e=0$ 的邻域 U 内,存在 Lyapunov 函数 $V(x)$,则平衡点 $x_e=0$ 是稳定的。

【证明】 设存在平衡点 $x_e=0$ 邻域 U 内的 Lyapunov 函数 $V(x)$。由引理 1.4.1,存在满足(1)和(2)的严格单调增函数 $\alpha(\tau)$和 $\beta(\tau)$。考虑使得球域

$$S_\varepsilon=\{x\mid\|x\|\leqslant\varepsilon\}\subseteq U$$

的任意 $\varepsilon>0$。对于 $\varepsilon>0$,取 $\delta(\varepsilon)>0$,使得

$$\beta(\delta)=\alpha(\varepsilon) \tag{1.4.11}$$

由于对任意初态 $x_0(\|x_0\|<\delta(\varepsilon))$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))\leqslant 0,\forall t\geqslant t_0 \tag{1.4.12}$$

所以

$$V(x(t))\leqslant V(x(t_0))=V(x_0),\forall t\geqslant t_0$$

故有

$$\alpha(\|x\|)\leqslant V(x)\leqslant V(x_0)\leqslant\beta(\|x_0\|),\forall t\geqslant t_0 \tag{1.4.13}$$

因为 $\beta(\tau)$为严格单调增函数,且 $\|x_0\|<\delta(\varepsilon)$,所以

$$\beta(\|x_0\|)<\beta(\delta) \tag{1.4.14}$$

由式(1.4.11)、(1.4.13)、(1.4.14),得

$$\alpha(\|x\|)<\alpha(\epsilon),\ \forall t\geq t_0$$

同理、由 $\alpha(\tau)$ 的单调递增性,有

$$\|x(t)\|<\epsilon,\ \forall t\geq t_0$$

证毕

【定理 1.4.2】 对于定常系统(1.4.9),如果在平衡点 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 邻域 U 内,存在 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})$,且满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}(t))=\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))=-W(\boldsymbol{x}(t)) \tag{1.4.15}$$

其中 $W(\boldsymbol{x})>0$,则系统(1.4.9)是渐近稳定的。

【证明】 由定理 1.4.1 知,系统是稳定的。并且由定理 1.4.1 的证明可知,对于任意给定的初始条件 $x_0\in U$,存在 $\epsilon_0>0$,使得

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\epsilon_0,\ \forall t\geq t_0$$

因为 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 是 t 的单调递减函数,且下有界,所以极限 $\lim\limits_{t\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t))$ 存在。令

$$\lim_{t\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=L \tag{1.4.16}$$

假设 $L\neq 0$。由 $W(\boldsymbol{x})>0$、$\forall t\geq t_0$,一定存在充分小正数 $l>0$,使得

$$W(\boldsymbol{x})>l,\ \forall t\geq t_0$$

所以,$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))<-l,\ \forall t\geq t_0$,如图 1.4.1 所示,存在有限的 $t_1\leq(V(x_0)-L)/l$,使得

$$V(\boldsymbol{x}(t_1))=L$$

这一结论与式(1.4.16)矛盾,故 $L=0$。由 Lyapunov 函数的定义,$V(\infty)=0$ 意味着 $\boldsymbol{x}(\infty)=\boldsymbol{0}$,即

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$$

证毕

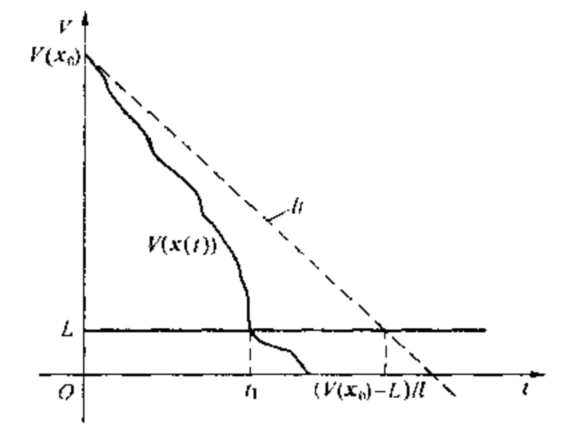


图 1.4.1 渐近稳定性

【定理 1.4.3】 对于定常系统(1.4.9),如果在平衡点 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 的领域内,存在 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})$,且满足

(1) $\gamma_1\|\boldsymbol{x}\|^2\leq V(\boldsymbol{x})\leq\gamma_2\|\boldsymbol{x}\|^2,\ \forall \boldsymbol{x}\in U$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}(t))\leq-\mu\|\boldsymbol{x}\|^2,\ \forall \boldsymbol{x}\in U$

其中 $\gamma_1>0$、$\gamma_2>0$、$\mu>0$ 为给定常数,则该系统是指数稳定的。

【证明】 设满足条件(1)、(2)的 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})$ 存在,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}(t))\leq-\frac{\mu}{\gamma_2}V(\boldsymbol{x}(t)),\ \forall \boldsymbol{x}\in U$$

$$\frac{\dot{V}(\boldsymbol{x}(t_0))}{V(\boldsymbol{x}(t))}\leq-\frac{\mu}{\gamma_2}$$

对任意给定的初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$,对上式两端从 t_0 到 t 积分,得

$$\ln V(\boldsymbol{x}(t))-\ln V(\boldsymbol{x}(t_0))\leq-\frac{\mu}{\gamma_2}(t-t_0)$$

所以

$$\frac{V(\boldsymbol{x}(t))}{V(\boldsymbol{x}_0)} \leqslant \exp\left[-\frac{\mu}{\gamma_2}(t-t_0)\right]$$

根据上式及条件(1),有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{\gamma_1}V(\boldsymbol{x}_0)\exp\left[-\frac{\mu}{\gamma_2}(t-t_0)\right] \leqslant$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\|\boldsymbol{x}_0\|^2\exp\left[-\frac{\mu}{\gamma_2}(t-t_0)\right] = \alpha\|\boldsymbol{x}_0\|^2\exp[-\lambda(t-t_0)]$$

其中,$\alpha = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$,$\lambda = \frac{\mu}{\gamma_2}$。 **证毕**

以上各定理给出了非线性定常系统稳定性的充分条件。对于线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.17}$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$为定常矩阵。如果取二次型

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \quad (\boldsymbol{P}\text{ 是对称阵})$$

作为式(1.4.17)的 Lyapunov 函数,那么,沿解轨迹有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.18}$$

记

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q} \tag{1.4.19}$$

显然 $\boldsymbol{Q}$ 也是对称阵。方程(1.4.19)称为 Lyapunov 方程。那么,由式(1.4.19),式(1.4.18)可化为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) < 0 \quad (\text{对任意 } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$$

因而,由定义 1.4.5,$V = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 可作为 Lyapunov 函数。并且$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < 0$,于是,我们有如下定理。

【定理 1.4.4】 系统(1.4.17)是渐近稳定的充分必要条件是,对某个已给的对称正定阵 $\boldsymbol{Q}$,矩阵方程(1.4.19)有惟一解 $\boldsymbol{P}$,且 $\boldsymbol{P}$ 也是正定的。

定理的充分性可由前面的分析得出,定理的必要性的证明略。

如果令

$$\gamma_1 = \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}),\ \gamma_2 = \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}),\ \mu = \lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})$$

显然有

$$\gamma_1\|\boldsymbol{x}\|^2 \leqslant V(\boldsymbol{x}) \leqslant \gamma_2\|\boldsymbol{x}\|^2,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leqslant -\mu\|\boldsymbol{x}\|^2,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$$

因此,对于线性定常系统来说,如果是渐近稳定的话,则一定是全局指数稳定。

【例 1.4.1】 已知

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试判断其稳定性。

【解】 取 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$,方程(1.4.19)化为

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} -5P_{12}-5P_{12}=-1 \\ -5P_{22}+P_{11}-2P_{12}=0 \\ P_{12}-2P_{22}+P_{12}-2P_{22}=-1 \end{cases}$$

解得　$P_{12}=\frac{1}{10}, P_{22}=\frac{3}{10}, P_{11}=\frac{17}{10}$,所以

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \frac{17}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{P}$ 是正定阵,因此,该系统是渐近稳定的。

1.4.3 时滞系统的稳定性

考虑时滞泛函微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_t),\ t\geqslant t_0 \tag{1.4.20a}$$

$$\boldsymbol{x}_{t_0}(\theta)=\boldsymbol{\phi}(\theta),\ \forall\,\theta\in[-d,0] \tag{1.4.20b}$$

其中 $\boldsymbol{x}_t(\cdot)$表示对给定的 $t\geqslant t_0$

$$\boldsymbol{x}_t(\theta)=\boldsymbol{x}(t+\theta),\ \forall\,\theta\in[-d,0] \tag{1.4.21}$$

首先,我们引入如下符号。$C_{n,d}=C([-d,0],\mathbf{R}^n)$表示将区间$[-d,0]$映射到 $\mathbf{R}^n$ 的连续向量值函数构成的 Banach 空间;$\|\boldsymbol{\phi}\|_\infty=\sup_{-d\leqslant t\leqslant 0}\|\boldsymbol{\phi}(t)\|$ 表示函数 $\boldsymbol{\phi}\in C_{n,d}$的范数,其中 $\|\cdot\|$ 为 Euclidean 范数;集合 $C_{n,d}^v=\{\boldsymbol{\phi}\in C_{n,d}\mid\|\boldsymbol{\phi}\|_\infty<v\}$,其中 v 是正实数。

假设 $\boldsymbol{\phi}\in C_{n,d}^v$,映射 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\phi}):\mathbf{R}^+\times C_{n,d}^v\to\mathbf{R}^n$ 是连续的且关于$\boldsymbol{\phi}$ 满足 Lipschitz 条件(见式(1.4.2)),$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$。

令 $\boldsymbol{x}(t_0,\boldsymbol{\phi})$表示在初始条件$(t_0,\boldsymbol{\phi})\in\mathbf{R}^+\times C_{n,d}^v$下,泛函微分方程(1.4.20a)的解。

【定义 1.4.5】 如果下列条件成立,则称方程(1.4.20)的零解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$ 是一致渐近稳定的。

(1) 对每一个 $\varepsilon>0$ 和每一个 $t_0\geqslant 0$,存在与 t_0 无关的 $\delta=\delta(\varepsilon)$,使得对任意 $\boldsymbol{\phi}\in C_{n,d}^\delta$,方程(1.4.20)的解 $\boldsymbol{x}(t_0,\boldsymbol{\phi})$,对所有 $t\geqslant t_0$ 满足 $\boldsymbol{x}_t(t_0,\boldsymbol{\phi})\in C_{n,d}^\varepsilon$。根据定义式(1.4.21),$\boldsymbol{x}_t(t_0,\boldsymbol{\phi})(\cdot)$表示 $\boldsymbol{x}_t(t_0,\boldsymbol{\phi})(\theta)=\boldsymbol{x}(t_0,\boldsymbol{\phi})(t+\theta)$。

(2) 对每一个 $\eta>0$ 和每一个 $t_0\geqslant 0$,存在与 t_0 无关的 $T(\eta)$和与 η 和 t_0 无关的 $v_0>0$,使得对任意 $\boldsymbol{\phi}\in C_{n,d}$,$\|\boldsymbol{\phi}\|_\infty<v_0$ 隐含 $\|\boldsymbol{x}_t(t_0,\boldsymbol{\phi})\|_\infty<\eta$,$\forall\,t\geqslant t_0+T(\eta)$。

注意到,条件(1)为一致稳定性的定义(参阅文献[21]中的定义 8.3),而条件(2)为渐近稳定性的定义(参阅文献[21]中的定义 8.4)。

令 $V_i(\cdot)$,$i=1,2,3$,表示连续非减标量函数,且具有如下性质

$$V_i(\boldsymbol{x})>0,\ \forall\,\boldsymbol{x}>0;\ V_i(\boldsymbol{0})=0\qquad i=1,2,3$$

【定理 1.4.5】 考虑泛函微分方程(1.4.20)。设存在连续泛函 $V(t,\boldsymbol{\phi})$满足:

(1) $V_1(\|\boldsymbol{\phi}(0)\|)\leqslant V(t_0,\boldsymbol{\phi})\leqslant V_2(\|\boldsymbol{\phi}(\theta)\|)$;

(2) $\dot{V}(t,\boldsymbol{x}_t)\leqslant -V_3(\|\boldsymbol{x}(t)\|)$,其中 $\dot{V}(t,\boldsymbol{x}_t)$表示 $V(t,\boldsymbol{x}_t)$沿方程(1.4.20)的解轨迹的时间导数,则方程(1.4.20)的零解是一致渐近稳定的。

注意,条件(1)意味着泛函 $V(t,\boldsymbol{\phi})$是正定的。上述定理又称为 Krasovskii 稳定性定理[82]。

我们在第五章讨论时滞系统稳定性时,将用到定理 1.4.5。

1.5 线性规划

最优化方法是从众多可能方案中选择最佳者,以达到最优目标的科学。线性规划是最优化方法中理论完整、方法成熟、应用广泛的一个分支。近年来,线性规划方法已经渗透到控制理论的许多领域。最优控制理论、线性矩阵不等式(LMI)的求解等都可归结为线性规划问题的求解。本节的目的不是讨论线性规划的求解,而在于向读者介绍有关线性规划的一些最基本的概念,以求能够顺利阅读本书和有关资料。详细内容可查阅任意一本最优化理论、运筹学方面的书籍,如文献[6]、[7]。

1.5.1 凸集与凸函数

【定义 1.5.1】(凸集) 设集合 $D\subset\mathbf{R}^n$,若对于任意点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$,及实数 α,$0\leqslant\alpha\leqslant 1$,都有

$$\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}\in D$$

则称集合 D 为凸集。

【例 1.5.1】 试证明超平面

$$H=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b\}$$

为凸集。

【证明】 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in H$

即

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

$$a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n=b$$

对 $\alpha\in[0,1]$,有

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}=&[\alpha x_1+(1-\alpha)y_1,\alpha x_2+(1-\alpha)y_2,\cdots,\alpha x_n+(1-\alpha)y_n]^{\mathrm{T}}\\&a_1[\alpha x_1+(1-\alpha)y_1]+\cdots+a_n[\alpha x_n+(1-\alpha)y_n]=\\&\alpha(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)+(1-\alpha)(a_1y_1+\cdots+a_ny_n)=\\&\alpha b+(1-\alpha)b=b\end{aligned}$$

即点 $\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}\in H$,所以 H 是凸集。 **证毕**

类似地,读者可自行证明超球 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant r$,整个 Euclidean 空间 $\mathbf{R}^n$、半空间 $H^+=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant b\}$等都是凸集。并规定空集 ϕ 是凸集。

凸集的几何意义为对于非空集合 $D\subset\mathbf{R}^n$,连结 D 中任意两点 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 的线段仍属于该集合,则称 D 为凸集。

凸集具有如下性质。

【性质 1.5.1】 设 $D_1,D_2,\cdots,D_k$ 是凸集,则它们的交

$$D=D_1\cap D_2\cap\cdots\cap D_k$$

是凸集。

【证明】 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D,\alpha\in[0,1]$。由 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$ 知,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D_j,j=1,2,\cdots,k$。因为 D_j 是凸集,所以 $\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}\in D_j,j=1,2,\cdots,k$。于是 $\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}\in D$,所以 D 是凸集。 **证毕**

【性质 1.5.2】 设 D 是凸集,β 为实数,则集合

$$\beta D=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}=\beta\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in D\}$$

是凸集。

【证明】 设 $y,z\in\beta D$，则存在 $x_1,x_2\in D$，使得 $y=\beta x_1, z=\beta x_2$。因为 D 是凸集，对于任意的 $\alpha\in[0,1]$，有 $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\in D$。于是 $\alpha y+(1-\alpha)z=\beta[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\in\beta D$。所以 βD 是凸集。 **证毕**

类似地可以证明下述性质。

【性质 1.5.3】 设 D_1、D_2 是凸集，则 D_1 与 D_2 的和集

$$D_1+D_2=\{y\mid y=x+z, x\in D_1, z\in D_2\}$$

是凸集。

【性质 1.5.4】 设 $D_i, i=1,2,\cdots,k$ 是凸集，则 $\sum_{i=1}^{k}\beta_i D_i$ 也是凸集，其中 $\beta_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是实数。

【定义 1.5.2】(凸组合) 设 $x_i\in R^n, i=1,2,\cdots,k$，实数 $\lambda_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$，则 $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i$ 称为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的凸组合。

由凸集的定义知，凸集 D 中任意两点 x,y 的凸组合属于 D。推广到一般，凸集 D 中任意有限个点的凸组合仍属于 D。

【定义 1.5.3】(极点) 设 D 为凸集，$x\in D$。若 D 中不存在两个相异的点 y,z 及某一实数 $\alpha\in[0,1]$，使得

$$x=\alpha y+(1-\alpha)z$$

则称 x 为 D 的极点。

可以证明，平面中，正方形的四个顶点都是此正方形的极点，圆周 $\|x\|=a$ 上的点都是圆域 $D:\|x\|\leqslant a$ 的极点。

【定义 1.5.4】(凸函数) 设函数 $f(x)$ 定义在凸集 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上。若对于任意的 $x,y\in D$ 及任意实数 $\alpha\in[0,1]$，都有

$$f[\alpha x+(1-\alpha)y]\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

则称 $f(x)$ 为凸集 D 上的凸函数。

【定义 1.5.5】(严格凸函数) 设函数 $f(x)$ 定义在凸集 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上。若对于任意的 $x,y\in D, x\neq y$，及任意的 $\alpha\in[0,1]$，都有

$$f[\alpha x+(1-\alpha)y]<\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

则称 $f(x)$ 为凸集 D 上的严格凸函数。

【例 1.5.2】 试证线性函数 $f(x)=c^{\mathrm{T}}x=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的凸函数。

【证明】 设 $x,y\in\mathbf{R}^n, \alpha\in[0,1]$，则

$$f[\alpha x+(1-\alpha)y]=c^{\mathrm{T}}[\alpha x+(1-\alpha)y]=\alpha c^{\mathrm{T}}x+(1-\alpha)c^{\mathrm{T}}y=\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

所以 $c^{\mathrm{T}}x$ 是凸函数。 **证毕**

凸函数具有如下性质。

【性质 1.5.5】 设 $f(x)$ 是凸集 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的凸函数，实数 $k\geqslant 0$，则 $kf(x)$ 也是 D 上的凸函数。

【证明】 取任意 $x,y\in D$ 及 $\alpha\in[0,1]$。因为 $f(x)$ 是 D 上的凸函数，所以有

$$f[\alpha x+(1-\alpha)y]\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

又因为 $k \geqslant 0$，所以

$$kf[\alpha x+(1-\alpha)y] \leqslant k\alpha f(x)+k(1-\alpha)f(y)$$

因此，$kf(x)$是 D 上的凸函数。 **证毕**

类似地可以证明下述性质。

【性质 1.5.6】 设 $f_1(x), f_2(x)$是凸集 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的凸函数，实数 $\lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0$，则 $\lambda f_1(x)+\mu f_2(x)$也是 D 上的凸函数。

【性质 1.5.7】 设 $f(x)$是凸集 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的凸函数，β 为实数，则水平集

$$S(f,\beta)=\{x \mid x \in D, f(x) \leqslant \beta\}$$

是凸集。

【证明】 设 $x, y \in S(f,\beta)$及 $\alpha \in [0,1]$，于是 $x, y \in D$，且 $f(x) \leqslant \beta, f(y) \leqslant \beta$。因为 D 是凸集，所以 $\alpha x+(1-\alpha)y \in D$。又因为 $f(x)$是 D 上的凸函数，所以有

$$f[\alpha x+(1-\alpha)y] \leqslant \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \leqslant \alpha\beta+(1-\alpha)\beta=\beta$$

即 $\alpha x+(1-\alpha)y \in S(f,\beta)$。因此，$S(f,\beta)$是凸集。 **证毕**

【定义 1.5.6】(凸规划) 设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为凸集，$f(x)$为 D 上的凸函数，则称规划问题

$$\min_{x \in D} f(x) \tag{1.5.1}$$

为凸规划(Convex Programming)问题。

一般目标函数 $f(x)$是 x 的非线性函数，因此，凸规划为非线性规划。

对于凸规划，可以证明如下定理成立。

【定理 1.5.1】 (1) 凸规划的任一局部极小点 x 是整体极小点，全体极小点组成凸集。(2) 若 $f(x)$是凸集 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的严格凸函数，且规划问题(1.5.1)的整体极小点存在，则整体极小点是惟一的。

1.5.2 线性规划的标准形与基本概念

线性规划(Linear Programming，简记为 LP)问题是求一组非负变量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，在一组线性等式或不等式约束下，使一个线性目标函数达到极小或极大。线性规划的标准形可以表示为

$$(\mathrm{LP})\begin{cases} \min c^{\mathrm{T}} x & (1.5.2)\\ s.t.\quad Ax=b & (1.5.3)\\ \qquad\quad x \geqslant 0 & (1.5.4)\end{cases}$$

其中 $c=(c_1, c_1, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}, x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$，

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

各种形式的线性规划都可化为标准形线性规划。

矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$称为约束矩阵，向量 b 称为右端向量。满足约束条件(1.5.3)和(1.5.4)的向量 x 是可行解。全体可行解构成可行域 D。当可行域 $D=\phi$ 时，称此线性规划无可行解或无解。当 $D \neq \phi$，但目标函数在 D 上无界时，则称此线性规划(LP)无最优解或无界。

【定理 1.5.2】 线性规划(LP)问题(1.5.2)、(1.5.3)和(1.5.4)的可行域 D 是凸集。

【证明】 取任意 $x,y\in D$,则有

$$Ax=b,x\geqslant 0;Ay=b,y\geqslant 0$$

对任意的 $\alpha\in[0,1]$,设 $z=\alpha x+(1-\alpha)y$,则 $z\geqslant 0$,且

$$Az=A(\alpha x+(1-\alpha)y)=\alpha Ax+(1-\alpha)Ay=\alpha b+(1-\alpha)b=b$$

所以(LP)的可行域 D 是凸集。 证毕

由例 1.5.2 和定理 1.5.2 可知,线性规划问题是一种凸规划问题。

设约束方程(1.5.3)中的 A 的秩为 m,且 $m\leqslant n$,则 A 中必存在 m 阶非奇异的子方阵 $B=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$,称为(LP)问题的一个基矩阵。列向量 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 称为基向量,其余的列向量称为非基向量。与基向量对应的变量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 称为基变量,其余变量称为非基变量。

在约束方程(1.5.3)中取定一个基矩阵 B,令非基变量均为 0,则方程组

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_mx_m=b$$

有惟一解。其解向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$ 称为与基矩阵 B 对应的基解。

显然,线性规划(LP)的基解个数不会超过 C_n^m。基解中的非零分量不一定全部非负。若基解又满足非负约束(1.5.4),则称它为基可行解。此时的基 B 称为可行基。基可行解中非零分量的个数不会超过 m。若基可行解中正分量的个数恰为 m,则称此基可行解为非退化的基可行解。如果一个线性规划(LP)的所有基可行解都是非退化的,则称此(LP)为非退化的。

可以证明,若线性规划(LP)问题有最优解,只需从基可行解中找最优解。如前所述,基可行解的个数不会超过 C_n^m。当 n 和 m 很大时,要算出全部基可行解,并从中选出一个使目标函数达极小值的解,其计算量是很大的。因此,实际的线性规划求解算法应按一定的规律只挑选一部分基可行解,并且收敛到极小点,如单纯形方法等[6],[7]。

1.6 上确界与下确界

1.6.1 确界存在原理

【定义 1.6.1】(上、下界) 设 $A\subset\mathbf{R}$,如果有一数 M,对一切 $x\in A$ 都有 $x\leqslant M(x\geqslant M)$,则称 M 为集合 A 的一个上界(下界)。如果 A 既有上界,又有下界,则称 A 为有界集,不是有界的数集称为无界集。

例如,区间$[0,1]$既有上界 1,又有下界 0,从而$[0,1]$是有界集。再如,区间$(-\infty,0)$,它有上界 0,但无下界;区间$(0,+\infty)$有下界,但无上界。

如果一个数集(实数集)E 有上(下)界,则它的上(下)界不是惟一的。事实上,如果 M 是 E 的一个上界,则区间$[M,+\infty)$内任何一个数都是 E 的上界;如果 M 是 E 的一个下界,则区间$(-\infty,M]$内任一个数都是 E 的下界。即一个有上(下)界的数集 E,它的上(下)界可以有无穷多个。那么,是否一切有上(下)界的数集都存在最小上界(最大下界)? 回答是肯定的。

【定义 1.6.2】(上、下确界) 数集 A 的最小上界(最大下界)称为 A 的上确界(下确界),记为 $\sup A(\inf A)$。

上确界 $\sup A$ 有两层含意:

(1) 对任意的 $x\in A$,有 $x\leqslant\sup A$(保证 $\sup A$ 是 A 的上界)。

(2) 对任意的 $\varepsilon>0$,总存在某个数 $x_0\in A$,有 $\sup A-\varepsilon<x_0$(保证 $\sup A$ 是 A 的最小上界)。

这两点可作为上确界的等价定义。

同理，读者不难写出 $\inf A$ 的两层含意。

例如 $\inf(0,1)=0, \sup(0,1)=1$。$\sup\{\sin x \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\}=1$。$\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in N\}=0$。

值得注意的是，若 α 是数集 A 的上(下)确界，则 α 未必一定属于 A。

当 $\max A$ 存在时，它必是 A 的最小上界，由此得 $\sup A=\max A$。但当 $\max A$ 不存在时，$\sup A$ 仍可能存在，例如，$\sup(0,1)=1$，但 $\max(0,1)$ 不存在。因此，确界的概念是最大(小)数概念的推广，它是极重要的数学推理工具。

下面的定理称为确界存在原理。

【定理 1.6.1】 若非空数集 E 有上(下)界，则数集 E 存在惟一的上确界(下确界)。

该定理的证明，有兴趣的读者可参阅文献[3]。

以两个例题说明确界存在原理的应用。

【例 1.6.1】 设 E 是一个非空数集，m 和 M 是两个实数，试证：(1)若对任何 $x \in E$，都有 $x \leqslant M$，则 $\sup E \leqslant M$；(2) 若对任何 $x \in E$，都有 $x \geqslant m$，则 $\inf E \geqslant m$。

【证明】 (1) 已知对任何 $x \in E$，都有 $x \leqslant M$，可见数集 E 有上界 M，根据确界定理，存在 $\sup E$。又由定义知，$\sup E$ 是 E 的最小上界，而 M 是 E 的一个上界。因此 $\sup E \leqslant M$。

(2) 类似可证。 **证毕**

【例 1.6.2】 证明若 A 与 B 是两个非空数集，且对任意 $x \in A$ 与任意 $y \in B$，有 $x \leqslant y$，则

$$\sup A \leqslant \inf B$$

【证明】 由已知条件，A 有上界，B 有下界，根据确界定理，存在 $\sup A$ 与 $\inf B$。

已知对任意 $x \in A$，任意 $y \in B$，有 $x \leqslant y$，则有

$$x \leqslant \sup A, \inf B \leqslant y$$

反证。假设 $\sup A > \inf B$，则取 $\epsilon=\sup A-\inf B>0$，对此，存在某个元素 $y_0 \in B$，使

$$y_0 < \inf B+\varepsilon=\inf B+(\sup A-\inf B)=\sup A$$

已知对任意 $x \in A$，有 $x \leqslant y_0$，可见 y_0 是 A 的一个上界。注意到 $\sup A$ 是 A 的最小上界，故有

$$\sup A = y_0$$

从而得 $\sup A \leqslant y_0 < \sup A$，这是不可能的，故应有

$$\sup A \leqslant \inf B$$

证毕

1.6.2 函数的确界

【定义 1.6.3】(函数的上、下确界) 设 $f(x)$ 在数集 A 上有定义，称 $\sup\{f(x) \mid x \in A\}$ 为函数 $f(x)$ 在 A 上的上确界，记为 $\sup\limits_{x \in A} f(x)$；$\inf\{f(x) \mid x \in A\}$ 为函数 $f(x)$ 在 A 上的下确界，记为 $\inf\limits_{x \in A} f(x)$。

类似地，读者不难写出函数确界的两层含意。

函数的确界有如下性质。

【定理 1.6.2】 设函数 $f(x), g(x)$ 在 A 上有定义，c 是常数，则：

(1) 下面两式当两端有意义时成立

$$\inf_{x \in A} f(x)+\inf_{x \in A} g(x) \leqslant \inf_{x \in A}[f(x)+g(x)] \leqslant \inf_{x \in A} f(x)+\sup_{x \in A} g(x)$$

$$\inf_{x\in A} f(x)+\sup_{x\in A} g(x)\leqslant\sup_{x\in A}[f(x)+g(x)]\leqslant\sup_{x\in A} f(x)+\sup_{x\in A} g(x)$$

(2)
$$\inf_{x\in A}[f(x)+c]=\inf_{x\in A} f(x)+c$$
$$\sup_{x\in A}[f(x)+c]=\sup_{x\in A} f(x)+c$$

(3)
$$\inf_{x\in A}[-f(x)]=-\sup_{x\in A} f(x)$$
$$\sup_{x\in A}[-f(x)]=-\inf_{x\in A} f(x)$$

(4) 若 $f(x)$和 $g(x)$在 A 上非负,则下面两式当两端有意义时成立

$$\inf_{x\in A} f(x)\cdot\inf_{x\in A} g(x)\leqslant\inf_{x\in A}[f(x)g(x)]\leqslant\inf_{x\in A} f(x)\cdot\sup_{x\in A} g(x)$$
$$\inf_{x\in A} f(x)\cdot\sup_{x\in A} g(x)\leqslant\sup_{x\in A}[f(x)g(x)]\leqslant\sup_{x\in A} f(x)\cdot\sup_{x\in A} g(x)$$

(5) 若 $c\geqslant 0$,则

$$\inf_{x\in A}[cf(x)]=c\cdot\inf f(x)$$
$$\sup_{x\in A}[cf(x)]=c\cdot\sup f(x)$$

(6) 设函数 $f(x)$在 A 上有界,则

$$\sup_{x,y\in A}|f(x)-f(y)|=\sup_{x\in A} f(x)-\inf_{x\in A} f(x)$$

习　题

1.1　连续函数空间 $C[a,b]$。设 $J=[a,b]$上所有实值连续函数 $x(t)$所成之集为 X,对于任意 $x(t),y(t)\in X$,定义其度量为

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|$$

记 $C[a,b]=(X,d)$,则 $C[a,b]$是一度量空间。试证之(提示:连续函数在闭区间上可取到最大值,即存在 $t_0\in[a,b]$,使得

$$\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|=|x(t_0)-y(t_0)|$$

由此证明三角不等式)。

1.2　证明 $A\subset\overline{A}$,$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$。

1.3　设 X 是所有有序实数对 $\boldsymbol{x}=(\zeta_1,\zeta_2)$,$\boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2)$,…,组成的向量空间,证明

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=|\zeta_1|+|\zeta_2|$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_p=(\zeta_1^p+\zeta_2^p)^{\frac{1}{P}}\qquad(1<P<+\infty)$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max\{|\zeta_1|,|\zeta_2|\}$$

均是 X 上的范数。

1.4　证明在空间 $C[a,b]$上通过定积分

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$$

定义的泛函 $f:C[a,b]\to R$ 是线性有界的,且 $\|f\|=b-a$。

(提示:$\left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant(b-a)\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$)

1.5　证明在 l^2 上定义的内积

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_j\bar{\eta}_j$$

满足(IP$_1$) ~ (IP$_4$)。(提示:由 Schwarz 不等式,上式右端级数收敛)

1.6 设 $G(s)$为 $m\times n$ 维传函阵。试证明如下定义的 H_2 和 H_∞ 范数

$$\| G \|_2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[G^*(j\omega)G(j\omega)]d\omega\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\| G \|_\infty = \sup_\omega\{\bar{\sigma}(G(j\omega))\}$$

满足(N$_1$) ~ (N$_4$)。

1.7 设 $g_1(s)=\dfrac{1}{s+2}\in RH_2$, $g_2(s)=\dfrac{1}{s-1}\in RH_2^\perp$,试验证

$$\langle g_1, g_2\rangle = 0$$

1.8 设 $A(s), B(s)\in RH_\infty$。试证明如下不等式

$$\min\{\| A \|_\infty, \| B \|_\infty\} \leqslant \left\| \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right\|_\infty \leqslant \| A \|_\infty + \| B \|_\infty$$

1.9 矩阵

$$A_1 = 1, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

之奇异值各为何值?并求 A_3 的奇异值分解。

1.10 给定定常系统状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

试问平衡点 $x_1 = x_2 = 0$ 是否渐近稳定?(提示:取 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$)

1.11 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x$$

试判断其稳定性。

1.12 给定集合

$$\Omega = \{(x, y)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid y > 0\}$$

则 Ω 为 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的严格凸子集。在 Ω 上定义函数 $f: \Omega\to\mathbf{R}^+$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y}$$

试证 f 为 Ω 上的凸函数。(提示:给定 $\alpha > 0$,则 $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$,故只需证明 $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leqslant f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$)

第二章 线性二次型最优调节器

线性二次型最优调节器问题在最优控制理论中占有重要的地位。所谓调节器问题，就是当系统的被控输出偏离平衡点(给定值)时，如何设计一个恰当的控制输入信号施加于系统，使其输出迅速趋于平衡点。如果所设计的控制信号能使某一个性能指标泛函达到极值，则称此调节器为最优调节器。

对于线性系统，若取其性能指标泛函为系统状态变量和控制变量的二次型函数的积分，则可以得到一个和系统状态变量成线性关系的闭环最优控制。这类调节器问题称为线性二次型最优调节器问题。

线性二次型最优调节器问题不但可以得到闭环形式的解析解，而且在工程实际中具有应用价值。一方面，许多工程控制问题都可转换为线性二次型最优调节器问题；另一方面，闭环控制可以提高控制精度，是控制工程师们所期望的。同时，线性反馈控制也易于工程实现。本章我们首先介绍最优控制理论中的极大值原理的结果，然后重点讨论应用极大值原理求解有限时间和无限时间线性二次型最优调节器问题，最后对线性二次型高斯问题做一简单介绍，以便于后续章节的引用。

2.1 极大值原理

Pentryagin 的极大值原理是在古典的变分法基础上发展起来的。古典的变分法解决了当控制变量不受约束情况下，性能指标泛函取极值的必要条件，其结果可用来求解以状态方程描述的被控系统在各种边界约束条件下的最优控制问题。而极大值原理则给出了当控制变量受约束情况下，实现最优控制的必要条件。为统一起见，我们称控制变量受约束与不受约束条件下，实现最优控制的必要条件为极大值原理。该原理在本章讨论线性二次型最优控制问题中将起到核心作用。应当指出，尽管极大值原理给出的是最优控制的必要条件，但对实际最优控制问题，所得到的结果往往就是问题的最优解。

【问题 2.1.1】 给定被控系统状态方程

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], x(t_0) = x_0 \tag{2.1.1}$$

和性能指标泛函(也称价值函数、损失函数)

$$J[u(\cdot)] = \theta[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t]\mathrm{d}t \tag{2.1.2}$$

其中状态变量 $x(t)\in \mathbf{R}^n$，控制变量 $u(t)\in \mathbf{R}^p$，起始时刻 t_0 固定，终端时刻 $t_f > t_0$ 固定或可变。终端约束(目标集)

$$g[x(t_f), t_f] = \mathbf{0}, g \in \mathbf{R}^m, m < n$$

函数 f、L、θ 和 g 满足一定的连续可微条件。在容许控制集 Ω(控制变量的取值范围，Ω 可为开集或闭集，相应于控制变量 $u(t)$ 不受约束或受约束)中，求一控制变量 $u^*(t)$，使性能指标泛函 $J[u(\cdot)]$ 取极小值。

可以看到,问题 2.1.1 给出的最优控制问题,实质上是泛函(2.1.2)在状态方程(2.1.1)约束和终端约束 $g=0$ 下的条件极值问题。首先,我们知道,一般函数的条件极值问题可以应用 Lagrange 乘子法将其转化为无条件极值问题。类似地,泛函(可理解为"函数的函数")的条件极值问题也可应用 Lagrange 乘子法转化为无条件极值问题。其次,一般函数取极值的必要条件是它的一次导数(微分)等于零。而泛函取极值的必要条件是它的一次变分等于零。泛函变分的概念对应于函数微分的概念,有它的定义和运算法则。

基于上述思想,可对问题 2.1.1 给出的最优控制问题进行求解[9],[10],[11],其结果称为极大值原理。具体由如下定理给出。

【定理 2.1.1】 定义 Hamilton 函数

$$H[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t]=-L[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t] \quad (2.1.3)$$

其中 Lagrange 乘于向量 $\boldsymbol{\lambda}(t)\in\mathbf{R}^n$ 称为协态变量,则问题 2.1.1 中,最优控制 $\boldsymbol{u}^*(t)$、最优轨线 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 和最优终端时刻 t_f^* 所应满足的必要条件为

$$\dot{\boldsymbol{x}}^*(t)=\frac{\partial H[\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t]}{\partial\boldsymbol{\lambda}}=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{u}^*(t),t] \quad \text{状态方程} \quad (2.1.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=-\frac{\partial H[\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t]}{\partial\boldsymbol{x}} \quad \text{协态方程} \quad (2.1.5)$$

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \quad \text{初始条件} \quad (2.1.6)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f^*)=-\frac{\partial\theta[\boldsymbol{x}^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial\boldsymbol{x}(t_f)}-\frac{\partial\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial\boldsymbol{x}(t_f)}\boldsymbol{\mu} \quad \text{终端横截条件} \quad (2.1.7)$$

$$\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}^*(t_f^*),t_f^*]=\boldsymbol{0} \quad \text{终端约束条件} \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial H[\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t]}{\partial\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0} \quad \text{当}\ \Omega\ \text{为开集} \quad \text{极值条件} \quad (2.1.9\text{a})$$

或

$$H[\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t]=\max_{\boldsymbol{u}\in\Omega}H[\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t] \quad \text{当}\ \Omega\ \text{为闭集} \quad \text{极值条件} \quad (2.1.9\text{b})$$

当 t_f 可变时

$$H[\boldsymbol{x}^*(t_f^*),\boldsymbol{u}^*(t_f^*),\boldsymbol{\lambda}(t_f^*),t_f^*]=\frac{\partial\theta[\boldsymbol{x}^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial t_f}+\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial t_f} \quad \text{终端横截条件} \quad (2.1.10\text{a})$$

当 t_f 固定时

$$H[\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t]=H[\boldsymbol{x}^*(t_f),\boldsymbol{u}^*(t_f),\boldsymbol{\lambda}(t_f),t_f]+\int_{t_f}^{t}\frac{\partial H[\boldsymbol{x}(s),\boldsymbol{u}(s),\boldsymbol{\lambda}(s),s]}{\partial s}\mathrm{d}s \quad (2.1.10\text{b})$$

注 1 式(2.1.3)中的 $\boldsymbol{\lambda}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为处理状态方程约束(2.1.1)时,引人的 Lagrange 乘子向量。式(2.1.7)和式(2.1.10a)中的 $\boldsymbol{\mu}\in\mathbf{R}^m$ 为处理终端约束(2.1.8)时,引人的 Lagrange 乘子向量(非零常向量)。

注 2 状态方程(2.1.4)和协态方程(2.1.5)分别为 n 阶微分方程,相应的边界条件由式(2.1.6)和式(2.1.7)给出,构成两点边值问题。极值条件(2.1.9a)为 p 个代数方程。终端横截条件(2.1.10a)用来确定最优终端时刻 t_f^*。

由定理 2.1.1 解得的最优控制 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 使性能指标泛函(2.1.2)达极小值。同时由极值条

件(2.1.9)可以看出,最优控制 $u^*(t)$使 Hamilton 函数(2.1.3)达极大值。习惯上称定理 2.1.1 给出的结果为极大值原理。

最后,给出两个例题,一个是控制变量不受约束的情况,另一个是控制变量受约束的情况。读者可以从中体会极大值原理的应用方法。

【例 2.1.1】 给定一阶被控系统状态方程

$$\dot{x}(t)=u(t)$$

求最优控制 $u^*(t)$,使系统由初态 $x(0)=1$ 转移到终态 $x(t_f)=0$,其中终端时刻 t_f 是可变的,并使性能指标泛函

$$J[u(\cdot)] = t_f + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2(t)\mathrm{d}t$$

达极小值。

【解】 该题中,终端时刻 t_f 是可变的,而终端状态 $x(t_f)$是固定的。

构造 Hamilton 函数

$$H = H[x(t),u(t),\lambda(t),t] = -L+\lambda f = -\frac{1}{2}u^2(t)+\lambda(t)u(t)$$

由于控制变量 $u(t)$不受约束,由式(2.1.9a)的极值条件,可得

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = -u(t)+\lambda(t)=0 \quad \Rightarrow u^*(t)=\lambda(t)$$

解协态方程,得

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)}=0 \quad \Rightarrow \lambda(t)=C_1, u^*(t)=C_1$$

解状态方程,得

$$\dot{x}^*(t)=u^*(t)=C_1 \quad \Rightarrow x^*(t)=C_1t+C_2$$

由状态变量的初始条件 $x(0)=1$ 和终端条件 $x(t_f)=0$,有 $C_2=1, C_1=-\frac{1}{t_f}$。

再由终端横截条件(2.1.10a)

$$H[x^*(t_f^*),u^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),t_f^*] = \frac{\partial\theta[x^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial t_f}$$

得

$$-\frac{1}{2}u^{*2}(t_f^*)+\lambda(t_f^*)u^*(t_f^*)=1$$

将前面解得的 $u^*(t)$和 $\lambda(t)$代入上式,解得

$$t_f^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

最后,我们得到

$$u^*(t) = -\sqrt{2}$$

$$x^*(t) = 1-\sqrt{2}t$$

【例 2.1.2】 给定一阶系统

$$\dot{x}(t) = -x(t)+u(t), x(0)=2$$

其中控制变量 $u(t)$满足约束条件$|u(t)|\leqslant 1$。试确定最优控制 $u^*(t)$,使性能指标泛函

$$J[u(\cdot)] = \int_0^1 (2x(t) - u(t))\mathrm{d}t$$

达极小值。

【解】 此题中，终端时刻 $t_f = 1$ 固定，而终端状态 $x(t_f) = x(1)$是可变的。

构造 Hamilton 函数

$$H = -L + \lambda f = u - 2x + \lambda u - \lambda x = (1+\lambda)u - (2+\lambda)x$$

由于控制变量 $u(t)$受约束，由式(2.1.9b)的极值条件，可得

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & \lambda + 1 < 0 \\ 1 & \lambda + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

解协态方程，得

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2 + \lambda \quad \Rightarrow \lambda(t) = Ce^t - 2$$

由终端横截条件(2.1.7)，有 $\lambda(1) = 0$。利用该条件，解得 $C = 2e^{-1}$，所以

$$\lambda(t) = 2e^{t-1} - 2$$

可算得 $\lambda + 1 = 2e^{t-1} - 1$，因此

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leqslant t < 1 - \ln 2 = 0.307 \\ 1 & 0.307 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

在时间区间[0,1]内，最优控制 $u^*(t)$在 $t = 0.307$ 时刻发生一次切换。此种形式的控制律，通常称之为 Bang-Bang 控制(或称开关型控制)。

将求得的最优控制 $u^*(t)$代入状态方程，可求出最优轨线 $x^*(t)$。

$$\dot{x}^*(t) = \begin{cases} -x(t) - 1 & 0 \leqslant t < 0.307 \\ -x(t) + 1 & 0.307 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

解得

$$x^*(t) = \begin{cases} C_1 e^{-t} - 1 & 0 \leqslant t < 0.307 \\ C_2 e^{-t} + 1 & 0.307 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

由状态的初始条件 $x(0) = 2$，解得 $C_1 = 3$，于是

$$x^*(t) = 3e^{-t} - 1 \qquad 0 \leqslant t < 0.307$$

因为状态是连续的，第二段初始条件为 $x(0.307) = 3e^{-0.307} - 1 = 1.207$，解得 $C_2 = 0.280$。所以

$$x^*(t) = 0.280e^{-t} + 1 \qquad 0.307 \leqslant t \leqslant 1$$

2.2 LQ 问 题

设线性时变系统的状态方程和输出方程为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(t_0) = x_0 \tag{2.2.1a}$$

$$y(t) = C(t)x(t) \tag{2.2.1b}$$

其中状态 $x \in \mathbf{R}^n$，控制 $u \in \mathbf{R}^p$，输出 $y \in \mathbf{R}^q$，$A(t)$、$B(t)$、$C(t)$为具有相应维数的时变矩阵。我们的问题是求一控制 $u^*(t)$，在状态方程(2.2.1a)约束下，使性能指标 J(取为状态变量和控制变量的二次型函数的积分)达极小。此种形式的最优控制问题称为线性系统、二次型性能指标的最优控制问题，简称为线性二次型(Linear Quadratic，简记为 LQ)问题。在控制系统中，LQ 问题占有重要的地位。一方面，许多工程实际控制问题均可化为 LQ 问题；另一方面，它也

是最优控制中比较成熟的理论。LQ 问题的解可以写成统一的解析表达式，且为状态变量(注意，不是输出变量)的线性反馈(闭环控制)，易于工程实现。

关于二次型性能指标，我们做如下讨论。工程上，希望施加控制作用 $u(t)$，使系统输出 $y(t)$ 尽量接近某一理想输出 $y_r(t)$。考虑积分平方误差(Integral Square Error，简记为 ISE)准则函数

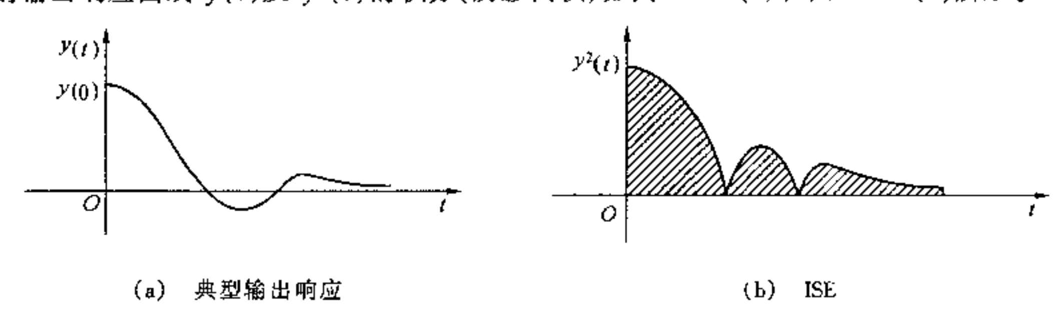
$$J = \int_0^{\infty} e^2(t)\mathrm{d}t \tag{2.2.2}$$

其中 $e(t) = y_r(t) - y(t)$。该准则实际上包括了经典控制理论中关于调节时间、超调量、振荡次数以及稳态误差等各项指标要求。

对 SISO 系统，若取 $y_r(t) = 0$，则 $e(t) = -y(t)$，此时，式(2.2.2)成为

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} y^2(t)\mathrm{d}t$$

典型的输出响应曲线 $y(t)$ 及 $y^2(t)$ 的积分(阴影面积)如图 2.2.1(a)和图 2.2.1(b)所示。



(a) 典型输出响应　　(b) ISE

图 2.2.1

由图可见，若 $u(t)$ 使指标 J 足够小，则 $u(t)$ 必使 $y(t)$ 衰减速度足够快且振荡幅度小、次数少。显然，为使 $y(t)$ 衰减速度快，应加大 $u(t)$ 的幅度(能量)。可证，使 J 达极小的 $u(t) = \infty$，这是不可实现的，因此，必须对 $u(t)$ 加以限制。为此，在 J 中加一控制 $u(t)$ 的惩罚项

$$J = \int_0^{\infty} [y^2(t) + \rho u^2(t)]\mathrm{d}t \tag{2.2.3}$$

其中 $\rho > 0$ 为加权系数。

将 $y(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)$ 代入式(2.2.3)中，得

$$J = \int_0^{\infty} [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \rho u^2(t)]\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \rho u^2(t)]\mathrm{d}t \tag{2.2.4}$$

其中 $\boldsymbol{Q}(t) \geqslant \boldsymbol{0}$ 为状态加权阵，其各元素大小表示相应状态在 J 中所占的比重，可以根据需要灵活选择。$\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}(t)$ 仅是一个特例。

对于向量 $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^p$，则式(2.2.4)可取如下形式

$$J = \int_0^{\infty} [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{2.2.5}$$

其中，控制加权阵 $\boldsymbol{R}(t) > \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)$ 代表控制功率，积分表示控制过程中所消耗的能量。

对有限时间(终端时刻 t_f 与初始时刻 t_0 之差 $t_f - t_0$ 有限)最优控制问题，指标(2.2.5)成为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{2.2.6}$$

式(2.2.6)的 J 达极小，则 $x(t)$(偏差)较小，当然 $x(t_f)$也会较小。若对终态 $x(t_f)$控制精度要求甚严，可在 J 中增加一个终态二次型函数的惩罚项

$$J = x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]\mathrm{d}t \tag{2.2.7}$$

其中加权阵 $F \geqslant 0$。从物理意义上讲，F、$Q(t)$至少半正定，$R(t)$应正定。

最后，对二次型性能指标做以下讨论：

(1) 令 $C(t)=I, y_r(t)=0$，则 $y(t)=x(t)=-e(t)$。即当 $x(t)$偏离平衡点($x=0$)时，用不大的控制能量，使 $x(t)$尽快趋于平衡点($x=0$)附近。称之为线性二次型状态最优调节器问题。简称为线性二次调节器(Linear Quadratic Regulator，简记为 LQR)问题。

(2) 令 $y_r(t)=0$，则 $y(t)=-e(t)$。即用不大的控制能量，使输出 $y(t)$保持在零值附近。称之为输出调节器问题。

(3) 若 $y_r(t)\neq 0$，则 $e(t)=y_r(t)-y(t)$。即用不大的控制能量，使实际输出 $y(t)$跟随理想输出 $y_r(t)$的变化。称之为跟踪问题。

以下几节，我们着重讨论 LQR 问题。

2.3 有限时间 LQR 问题

【问题 2.3.1】 给定线性时变系统状态方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(t_0) = x_0 \tag{2.3.1}$$

$u(t)$不受约束，求最优控制 $u^*(t)$，使二次型性能指标

$$J[u(\cdot)] = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]\mathrm{d}t \tag{2.3.2}$$

达极小值。终端时刻 t_f 固定。

由 2.1 节的极大值原理，构造问题的 Hamilton 函数

$$H = -L + \lambda^{\mathrm{T}}(t)f = -\frac{1}{2}[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)] + \lambda^{\mathrm{T}}(t)A(t)x(t) + \lambda^{\mathrm{T}}(t)B(t)u(t)$$

控制变量 $u(t)$不受约束，极值条件为

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = -R(t)u(t) + B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) \tag{2.3.3}$$

且

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -R(t) < 0 \tag{2.3.4}$$

由式(2.3.3)和式(2.3.4)可判断，最优控制

$$u^*(t) = R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) \tag{2.3.5}$$

使 Hamilton 函数达极大值，使性能指标(2.3.2)达极小值。

状态方程和初始条件以及协态方程和终端横截条件为

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = A(t)x(t) + B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) \\
\dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = Q(t)x(t) - A^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) \\
x(t_0) = x_0 \\
\lambda(t_f) = -Fx(t_f)
\end{cases}
\tag{2.3.6}
$$

其中,已将式(2.3.5)的 $u^*(t)$代入状态方程。求解式(2.3.6)的两点边值问题可得最优轨线 $x^*(t)$和协态变量 $\lambda(t)$。将 $\lambda(t)$代入式(2.3.5),即可求得最优控制 $u^*(t)$。但两点边值问题(2.3.6)一般很难解出解析解,而且我们希望得到闭环形式的解 $u=u(x)$。注意到,在式(2.3.6)中,协态变量与状态变量在终端时刻 t_f 处呈线性关系。受此启发,假设在区间 $t\in[t_0, t_f]$内,$\lambda(t)$与 $x(t)$具有线性关系

$$\lambda(t) = -P(t)x(t) \tag{2.3.7}$$

然后导出 $P(t)$应满足的条件。将式(2.3.7)两边对 t 求导,得

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) = & -\dot{P}(t)x(t) - P(t)\dot{x}(t) = \\
& -\dot{P}(t)x(t) - P(t)[A(t)x(t) + B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t)] = \\
& -\dot{P}(t)x(t) - P(t)[A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)] = \\
& [-\dot{P}(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)]x(t)
\end{aligned}
\tag{2.3.8}
$$

另一方面,由协态方程,有

$$\dot{\lambda}(t) = [Q(t) + A^{\mathrm{T}}(t)P(t)]x(t) \tag{2.3.9}$$

比较(2.3.8)和(2.3.9)两式,有

$$[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^{\mathrm{T}}(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t) + Q(t)]x(t) = 0$$

上式对任意 $x(t)$均成立,故

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^{\mathrm{T}}(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t) - Q(t) \tag{2.3.10a}$$

上式称为 Riccati 矩阵微分方程,简称 Riccati 方程。相应的终端边界条件可由式(2.3.6)和式(2.3.7)推得

$$P(t_f) = F \tag{2.3.10b}$$

【定理 2.3.1】 对于问题 2.3.1 的有限时间 LQR 问题,其性能指标(2.3.2)达极小值(实现最优控制)的充分必要条件为

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x^*(t) = -K(t)x^*(t) \tag{2.3.11}$$

其中反馈增益阵 $K(t)=R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)$,$P(t)$是 Riccati 方程(2.3.10)的解,$x^*(t)$是最优轨线,为如下状态方程的解

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^*(t) = & A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) = \\
& [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)]x^*(t),\ x^*(t_0) = x_0
\end{aligned}
\tag{2.3.12}
$$

【证明】 必要性是极大值原理的直接结果。

充分性。往证 $u^*(t) = -R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x^*(t)$时,二次型性能指标(2.3.2)达极小值。为此,引入如下等式

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)P(t_f)x(t_f) - \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_0)P(t_0)x(t_0) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x^{\mathrm{T}}P(t)x]\mathrm{d}t = \\
& \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\dot{x}^{\mathrm{T}}P(t)x + x^{\mathrm{T}}\dot{P}(t)x + x^{\mathrm{T}}P(t)\dot{x}]\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

将状态方程(2.3.1)和 Riccati 方程(2.3.10a)代入上式,得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)P(t_f)x(t_f)-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_0)P(t_0)x(t_0)=\\
&\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{x^{\mathrm{T}}[A^{\mathrm{T}}P(t)+\dot{P}(t)+P(t)A]x+u^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P(t)x+x^{\mathrm{T}}P(t)Bu\}\mathrm{d}t=\\
&\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{-x^{\mathrm{T}}Qx+x^{\mathrm{T}}P(t)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)x+u^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P(t)x+x^{\mathrm{T}}P(t)Bu\}\mathrm{d}t=\\
&\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{-x^{\mathrm{T}}Qx-u^{\mathrm{T}}Ru+[u+R^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)x]^{\mathrm{T}}R[u+R^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)x]\}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

将上式移项整理,同时考虑到式(2.3.10b),则有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(x^{\mathrm{T}}Qx+u^{\mathrm{T}}Ru)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_0)P(t_0)x(t_0)+\\
&\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[u+R^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)x]^{\mathrm{T}}R[u+R^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)x]\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{2.3.13}
$$

由式(2.3.13)的右端可知,当取 $u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)x$ 时,系统的二次型性能指标 $J[u(\cdot)]$,即式(2.3.13)的左端达极小值,且极小值为

$$
J^*[x(t_0)]=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_0)P(t_0)x(t_0)
\tag{2.3.14}
$$

这表明,式(2.3.11)的 $u^*(\cdot)$确为最优控制。于是充分性得证。 **证毕**

定理 2.3.1 充分性的另外一种证明方法是利用 Hamilton-Jaccobi 方程。该方程是实现最优控制的充分条件。有兴趣的读者可参阅文献[9]、[11]。

对于有限时间 LQ 问题的最优控制 $u^*(\cdot)$,它必定存在,而不依赖于系统(2.3.1)是否(A,B)能控。但是,$u^*(\cdot)$的存在性依赖于方程(2.3.10)解的存在性,而方程(2.3.10)解的存在性却与系统(2.3.1)的能控性有关。事实上,Riccati 方程(2.3.10)的解,具有如下几个性质。假设(A,B)能控(实际上可放宽为能稳),则:

(1) 对任意 $t\in[t_0,t_f]$,$P(t)$存在且惟一。

(2) 对任意 $t\in[t_0,t_f]$,$P(t)$是正定对称阵。

(3) 显然,$P(t)$依赖于终端时刻 t_f 和终端边界条件 F,故将其记为 $P(t)=P(t,t_f,F)$。则 $P(t,t_f,F)$在 $t\leqslant t_f$ 范围内有界。即存在常数阵 W,使 $P(t,t_f,F)\leqslant W$,$\forall\, t\leqslant t_f$。

(4) 对于线性定常系统,即 A、B、Q、R 均为常数阵,易知 $P(t,t_f,0)$仅与 t_f-t 有关,即

$$
P(t,t_f,0)=P(0,t_f-t,0)
$$

从而有

$$
P(t,\infty,0)=\lim_{t_f\to\infty}P(t,t_f,0)=\lim_{t_f\to\infty}P(0,t_f-t,0)=P(0,\infty,0)=P=\text{常数阵}
\tag{2.3.15}
$$

由性质(3)知,$P(t)$是有界的,从而保证式(2.3.11)的最优控制 $u^*(t)$是有界的。

【例 2.3.1】 给定一阶系统

$$
\dot{x}(t)=ax(t)+u(t),\, x(0)=x_0
$$

性能指标

$$
J=\frac{1}{2}fx^2(t_f)+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}[qx^2(t)+ru^2(t)]\mathrm{d}t
$$

其中 $f\geqslant 0, q>0, r>0$。求闭环形式的最优控制 $u^*(t)$。

【解】 由式(2.3.11),闭环形式的最优控制为

$$u^*(t) = -\frac{1}{r}P(t)x(t) \tag{2.3.16}$$

其中 $P(t)$满足 Riccati 方程(2.3.10)

$$\begin{cases}\dot{P}(t) = -2aP(t) + \frac{1}{r}P^2(t) - q & (2.3.17\text{a})\\ P(t_f) = f & (2.3.17\text{b})\end{cases}$$

对式(2.3.17a)两端从 t 到 t_f 积分,得

$$\int_{P(t)}^{f} \frac{1}{\frac{1}{r}P^2(t) - 2aP(t) - q}\mathrm{d}P(t) = \int_t^{t_f}\mathrm{d}t$$

解得

$$P(t) = r\frac{\beta + a + (\beta - a)\frac{f/r - a - \beta}{f/r - a + \beta}\mathrm{e}^{2\beta(t-t_f)}}{1 - \frac{f/r - a - \beta}{f/r - a + \beta}\mathrm{e}^{2\beta(t-t_f)}} \tag{2.3.18}$$

其中 $\beta = \sqrt{\frac{q}{r} + a^2}$

由式(2.3.12)得闭环状态方程

$$\dot{x}^*(t) = [a - \frac{1}{r}P(t)]x^*(t), x(0) = x_0$$

解得最优轨线

$$x^*(t) = x_0\exp\int_0^t [a - \frac{1}{r}P(t)]\mathrm{d}t$$

闭环控制系统的方框图如图 2.3.1 所示。最后,我们对以上结果做以下讨论:

(1) 取 $a=-1, f=0, t_f=1, x(0)=1, q=1$,而 r 可变。r 取不同值时,$P(t)$的变化曲线如图 2.3.2 所示。

可以看到,当 r 较小时,$P(t)$几乎等于常数,而当 r 较大时,$P(t)$呈时变特性。

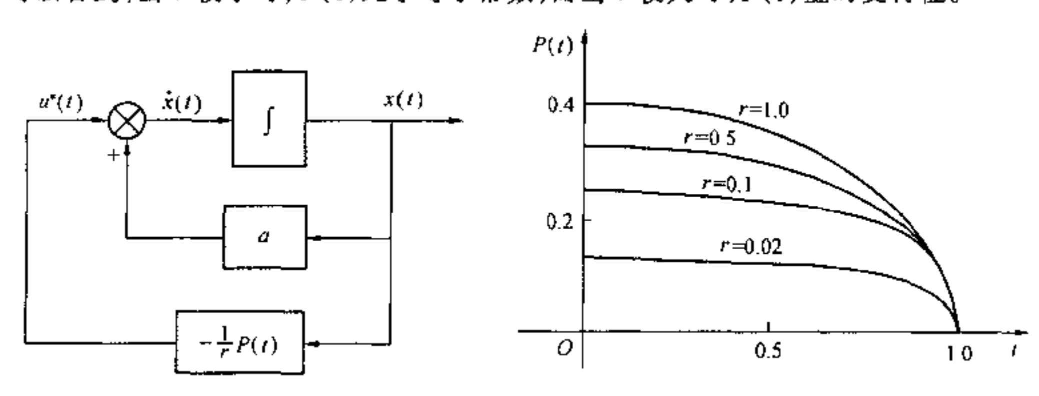


图 2.3.1 闭环系统 图 2.3.2 以 r 为参变量的 $P(t)$ 曲线

(2) 取 $a=-1, q=1, r=1, f=1$ 或 0,而 t_f 可变。对应于 $f=1$ 或 0,t_f 取不同值时,$P(t)$的变化曲线如图 2.3.3 所示。与图 2.3.2 比较,可见,$r=1$,相对较大,$P(t)$是时变的。但当增大 t_f 时,尽管 r 较大,$P(t)$仍在相当一段时间内保持常数。事实上,由式(2.3.18),有

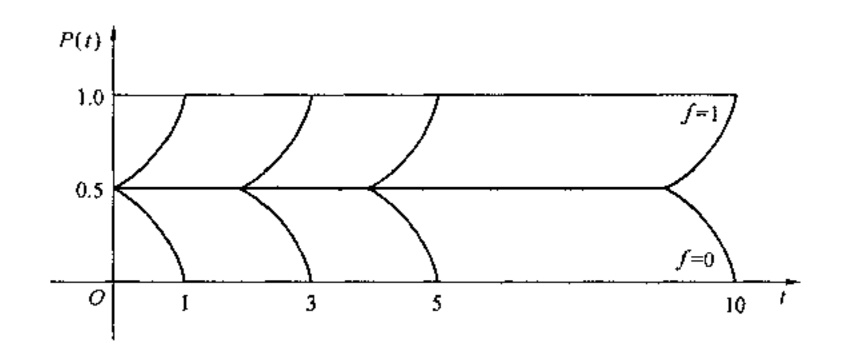


图 2.3.3　以 t_f 为参变量的 $P(t)$ 曲线

$$\lim_{t_f\to\infty} P(t) = r(\beta + a) = ar + r\sqrt{\frac{q}{r} + a^2} = 常数$$

这一点与 $P(t)$ 的性质(2.3.15)是吻合的。

2.4　无限时间 LQR 问题

从上节的讨论可知，当 t_f 有限时，$u^*(t) = -K(t)x(t)$，其中 $K(t) = R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)$ 为时变的。即使对于线性定常系统的 LQR 问题，即矩阵 A、B、Q、R 均与时间 t 无关，一般情况下，$K(t)$ 仍是时变的($P(t)$ 是时变的)。对于线性定常系统，工程上希望构造一个定常反馈控制律

$$u^*(t) = -Kx(t) \tag{2.4.1}$$

以使控制器的结构简单，易于实现。

如何获得式(2.4.1) 的定常反馈控制律呢？我们做如下分析。首先，如果终端时刻 t_f 大于控制系统的过渡过程时间 t_p，那么，t_f 相对于 t_p 来说，和 $t_f\to\infty$ 相对于 t_p 的意义是相当的。另一方面，对于线性定常系统，由上节讨论的 Riccati 方程的解 $P(t)$ 的性质以及例 2.3.1 的讨论可知，$P(t)$ 只在 $t = t_f$ 附近才会发生较大的变化，而在 $t < t_f$ 的很大范围内，$P(t)$ 保持为常值，即

$$\lim_{t_f\to\infty} P(t) = \lim_{t_f\to\infty} P(t, t_f, 0) = P = 常数 \tag{2.4.2}$$

也就是说，如果过渡过程时间 $t_p < t_f$，那么，在 $t < t_f$ 范围内，$P(t)$ 的变化情况和 $t_f\to\infty$ 时 $P(t)$ 的变化情况是相当的。这一点从图2.4.1可清楚地看出。由以上两点，我们有理由说，对于线性定常系统，如果所考察的终端时刻 t_f 大于过渡过程时间 t_p 的话，则可将 LQR 问题当作 $t_f\to\infty$ 的情况来处理。此时，在有限时间范围内 $P(t) = P = 常数阵$，从而反馈增益阵 $K(t) = K = 常数阵$。

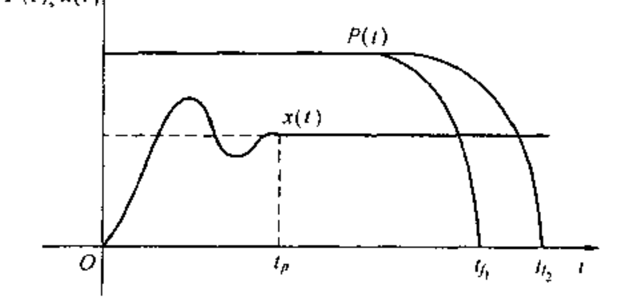


图 2.4.1　$t_{f_2} > t_{f_1} > t_p$ 的响应

【问题 2.4.1】　设线性定常系统状态方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \tag{2.4.3}$$

是能控的(可放宽为能稳)，$u(t)$不受约束。求式(2.4.1)形式的最优控制 $u^*(t)$，使二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \tag{2.4.4}$$

达极小值。其中 A、B、Q、R 为具有相应维数的常阵，且 $Q \geqslant 0, R > 0$。

由 Riccati 方程解的性质(2.4.2)可知，此时，Riccati 微分方程(2.3.10)退化为 Riccati 代数方程

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{2.4.5}$$

类似于定理 2.3.1 的证明，我们有如下定理。

【定理 2.4.1】 对于问题 2.4.1 的无限时间 LQR 问题，其性能指标(2.4.4)达极小值的充分必要条件为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px^*(t) = -Kx^*(t) \tag{2.4.6}$$

其中定常反馈增益阵 $K = R^{-1}B^T P$，P 是 Riccati 代数方程(2.4.5)的正定解。最优轨线 $x^*(t)$ 由下式确定

$$\dot{x}^*(t) = [A - BR^{-1}B^T P]x^*(t), x^*(0) = x_0 \tag{2.4.7}$$

且性能指标的最优值为

$$J^*[x(0)] = \frac{1}{2}x^T(0)Px(0) \tag{2.4.8}$$

关于 Riccati 代数方程(2.4.5)解的存在性，有如下结果。

【假设 2.4.1】 设加权阵 $Q \geqslant 0$ 可以分解为

$$Q = C^T C \tag{2.4.9}$$

(对非负定对称阵总可以进行这样的分解。如见文献[20]的定理 8.19)，且(C, A)能观测。

可以证明(见第四章定理 4.4.1，也见文献[18])，在假设 2.4.1 下，如果(A, B)能稳，(C, A)能观测，则 Riccati 代数方程(2.4.5)存在惟一正定解 $P > 0$。

在此，我们对有限时间和无限时间的 LQR 问题做如下比较：

(1) 问题 2.3.1 不要求系统是能控的，而问题 2.4.1 则要求系统是能控的。从能控性的定义可知，对有限时间 LQR 问题，由于其控制区间$[t_0, t_f]$是有限的，不可控状态对性能指标的影响也是有限的。但对无限时间 LQR 问题，只有系统是能控的，才能保证性能指标(2.4.4)的广义积分是收敛的，从而可对其求极小值。

(2) 问题 2.3.1 中的性能指标含有终值项，而问题 2.4.1 中的性能指标不含终值项。这是因为，对无限时间 LQR 问题，性能指标(2.4.4)广义积分收敛的必要条件是 $x(\infty) = 0$，$u(\infty) = 0$。性能指标的终值项已失去了意义。

【例 2.4.1】 已知被控系统状态方程和性能指标分别为

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + u(t), x_1(0) = x_{10}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t), x_2(0) = x_{20}$$

$$J[u(\cdot)] = \frac{1}{2}\int_0^\infty [x_2^2(t) + 0.1u^2(t)]dt$$

试求最优控制 $u^*(t) = -Kx^*(t)$，使性能指标达极小值。

【解】 可求得

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 0.1$$

$$\text{rank}[\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{Ab}] = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

所以系统是能控的。由式(2.4.6),有

$$u^*(t) = -R^{-1}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^*(t) = -10[1 \quad 0]\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} = -10P_{11}x_1^*(t) - 10P_{12}x_2^*(t)$$

其中 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$ 为如下 Riccati 代数矩阵方程的解。

$$-\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}10[1 \quad 0]\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} 5P_{11}^2 + P_{11} - P_{12} = 0 \\ 10P_{12}^2 - 1 = 0 \\ (1 + 10P_{11})P_{12} - P_{22} = 0 \end{cases}$$

解得 $P_{11} = 0.170\,6, P_{12} = 0.316\,2, P_{22} = 0.855\,6$。故

$$u^*(t) = -1.706x_1^*(t) - 3.162x_2^*(t)$$

相应的闭环系统框图如图 2.4.2 所示。

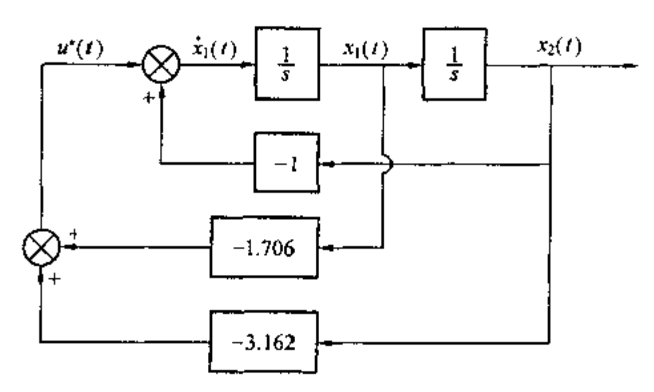


图 2.4.2 闭环系统框图

最后,我们指出,最优反馈控制律(2.4.6)导致的闭环系统(2.4.7)是大范围渐近稳定的。

【定理 2.4.2】 对于问题 2.4.1 的无限时间 LQR 问题,在假设 2.4.1 下,最优控制导致的闭环系统(2.4.7)必是大范围渐近稳定的。

【证明】 取闭环系统(2.4.7)的 Lyapunov 函数为(为简便计,略去 * 号)

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{2.4.10}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为 Riccati 方程(2.4.5)的正定对称解。因为 $\boldsymbol{P} > 0$,故 $V(\boldsymbol{x}) > 0$。其次,由式(2.4.10)和式(2.4.7),有

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} =$$
$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PA} - \boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x} =$$
$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PA} - \boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}) - \boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}]\boldsymbol{x} =$$

$$-x^{\mathrm{T}}(Q+PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P)x \tag{2.4.11}$$

因为 $Q\geqslant 0, R>0$,可知 $\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}t\leqslant 0$,下面证明,对任意 $x_0\neq 0$,沿方程(2.4.7)的解轨迹$x(t)$,有 $\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}t\neq 0$。反证,设方程(2.4.7)对相应于 $x_0\neq 0$ 的某个解 $x(t)$,有 $\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}t=0$。于是由式(2.4.11),可得

$$x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)=0,\ x^{\mathrm{T}}(t)PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t)=0 \tag{2.4.12}$$

上式中第二个等式意味着

$$u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)=(R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t))^{\mathrm{T}}R(R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t))=0$$

因为 $R>0$,上式意味着 $u(t)=0$。由假设 2.4.1,式(2.4.12)的第一个等式意味着

$$x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)=[Cx(t)]^{\mathrm{T}}[Cx(t)]=0$$

即存在 $x_0\neq 0$,使下式成立

$$C\mathrm{e}^{At}x_0=0$$

其中 $\mathrm{e}^{At}x_0$ 为齐方程 $\dot{x}(t)=Ax(t)$的解(此时,$u(t)=0$)。若(C,A)是能观测的,则上式不能成立。所以,应有 $\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}t<0$。根据 1.4 节的定理 1.4.2,闭环系统(2.4.7)为大范围渐近稳定(对线性定常系统,渐近稳定意味着大范围渐近稳定)。

但应指出,当 $Q\geqslant 0$ 时,式(2.4.9)的分解 $Q=C^{\mathrm{T}}C$ 可以不是惟一的。例如可有 $Q=C_1^{\mathrm{T}}C_1$ 和 $Q=C_2^{\mathrm{T}}C_2$, $C_1\neq C_2$。但是,可证只要(C_1,A)能观测,则(C_2,A)也必能观测。反证。设(C_1,A)能观测,而(C_2,A)不能观测,这意味着存在 $x_0\neq 0$,使下式成立

$$C_2\mathrm{e}^{At}x_0=0,\ \forall t\geqslant 0$$

故,对此 x_0,有

$$(C_1\mathrm{e}^{At}x_0)^{\mathrm{T}}(C_1\mathrm{e}^{At}x_0)=(\mathrm{e}^{At}x_0)^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}C_1(\mathrm{e}^{At}x_0)=$$

$$(\mathrm{e}^{At}x_0)^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}}C_2(\mathrm{e}^{At}x_0)=(C_2\mathrm{e}^{At}x_0)^{\mathrm{T}}(C_2\mathrm{e}^{At}x_0)=0,\ \forall t\geqslant 0$$

即成立

$$C_1\mathrm{e}^{At}x_0=0,\ \forall t\geqslant 0$$

这与(C_1,A)能观测矛盾。 证毕

2.5 最优调节器的性质

上节从时域角度讨论了线性定常系统无限时间状态最优调节器问题。定理 2.4.1 给出使二次型性能指标达最优的状态调节器的存在性,而定理 2.4.2 指出最优调节器导致的闭环系统是大范围渐近稳定的这一性质。对于线性定常系统,我们可以在频率域进一步讨论最优调节器所具有的性质,进一步揭示最优调节器的本质特征。这样做的原因之一是因为工程实际问题中所建立的系统的数学模型(状态方程)往往存在着参数的不确定性,此时,按标称模型所设计的调节器是否仍能保持闭环的渐近稳定性呢?这就是本节将要讨论的问题。

2.5.1 频率特性

考虑定理 2.4.1 给出的线性定常系统无限时间状态最优调节器问题的结果。将 Riccati 方程(2.4.5)左端同时加减项 sIP,并考虑到式(2.4.6),则得

$$P(sI-A)+(-sI-A^{\mathrm{T}})P+K^{\mathrm{T}}RK=Q$$

将上式左乘 $R^{-\frac{1}{2}}B^{\mathrm{T}}(-sI-A^{\mathrm{T}})^{-1}$,右乘$(sI-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}$,得

$$R^{-\frac{1}{2}}B^{\mathrm{T}}(-sI-A^{\mathrm{T}})^{-1}PBR^{-\frac{1}{2}}+R^{-\frac{1}{2}}B^{\mathrm{T}}P(sI-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}+$$
$$R^{-\frac{1}{2}}B^{\mathrm{T}}(-sI-A^{\mathrm{T}})^{-1}K^{\mathrm{T}}RK(sI-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}=$$
$$R^{-\frac{1}{2}}B^{\mathrm{T}}(-sI-A^{\mathrm{T}})^{-1}Q(sI-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}$$

上式两端同时加上单位阵 I,并考虑到 $PBR^{-\frac{1}{2}}=K^{\mathrm{T}}R^{\frac{1}{2}}$,且令 $s=\mathrm{j}\omega$,则上式成为

$$[I+R^{\frac{1}{2}}K(-\mathrm{j}\omega I-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}]^{\mathrm{T}}[I+R^{\frac{1}{2}}K(\mathrm{j}\omega I-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}]=$$
$$I+R^{-\frac{1}{2}}B^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega I-A^{\mathrm{T}})^{-1}Q(\mathrm{j}\omega I-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}} \tag{2.5.1}$$

上式左端为厄米特矩阵,右端的第二项为非负定阵(因为 $Q\geqslant 0$)。故式(2.5.1)可写成

$$[I+R^{\frac{1}{2}}K(-\mathrm{j}\omega I-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}]^{\mathrm{T}}[I+R^{\frac{1}{2}}K(\mathrm{j}\omega I-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}]\geqslant I \tag{2.5.2}$$

上式表明,按二次型性能指标(2.4.4)综合出的最优反馈增益阵 $K=R^{-1}B^{\mathrm{T}}P$ 所导致的闭环系统必满足不等式(2.5.2)。反之,凡满足不等式(2.5.2)的闭环反馈系统,都是对应于某个二次型性能指标的最优调节器。因此,称式(2.5.2)为最优调节器的频率条件。而$[I+R^{\frac{1}{2}}K(sI-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}]$称为系统的回程差函数。

下面就单输入系统继续讨论频率条件。此时,$B=b$,取 $R=1$,则频率条件(2.5.2)变为

$$|1+K(\mathrm{j}\omega I-A)^{-1}b|^{2}\geqslant 1 \tag{2.5.3}$$

由式(2.4.3)和式(2.4.6)构成的闭环反馈系统的结构图如图 2.5.1 所示。可等效为图 2.5.2 所示的具有单位负反馈的闭环系统。其中开环频率特性(奈氏曲线)是 $G_0(\mathrm{j}\omega)=K(\mathrm{j}\omega I-A)^{-1}b$,回程差函数是 $1+K(sI-A)^{-1}b=1+G_0(s)$。

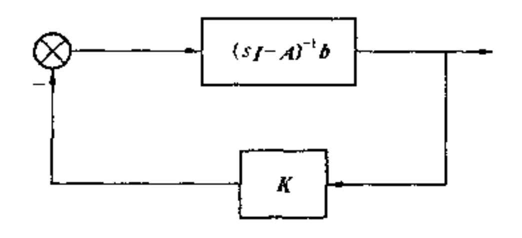


图 2.5.1 闭环系统

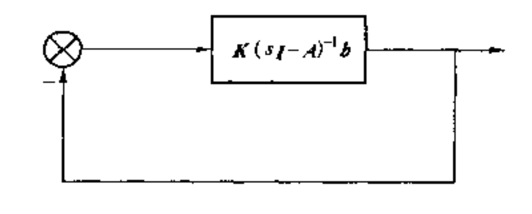


图 2.5.2 等效的闭环系统

最优调节器的频率条件(2.5.3)实际上构成了对奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 在复平面上的一种约束。式(2.5.3)说明,奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$上的任一点与复平面上点$(-1,\mathrm{j}0)$的距离至少为 1,即奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$不会进入以点$(-1,\mathrm{j}0)$为圆心的单位圆内,如图2.5.3所示。也就是说,最优调节器的奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$具有这样的特性,即它围绕点$(-1,\mathrm{j}0)$的圈数等于围绕以点$(-1,\mathrm{j}0)$为圆心的单位圆内任一点的圈数。

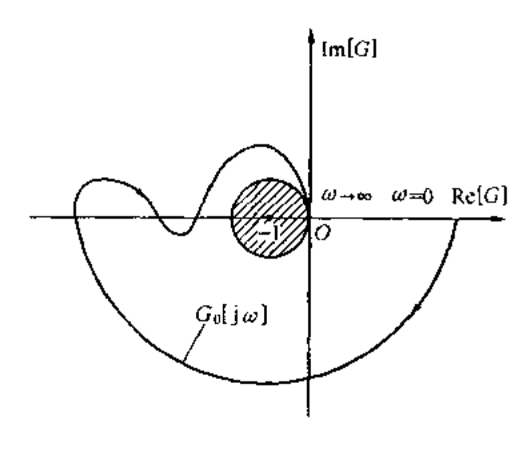


图 2.5.3 奈氏曲线

2.5.2 稳定裕度

对于最小相位(见定义 3.2.2)系统,稳定裕度用来表征一个系统由稳定变化为不稳定(临界稳定)还有多大的裕量。它是系统相对稳定性的

一种度量，分为增益（幅值）稳定裕度和相角稳定裕度。

【定义 2.5.1】（增益稳定裕度） 当开环奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 的相角等于 $-180°$ 时，$G_0(\mathrm{j}\omega)$ 幅值的倒数定义为增益稳定裕度 K_g，即

$$K_g = \frac{1}{|G_0(\mathrm{j}\omega_g)|} \tag{2.5.4}$$

其中频率 ω_g 叫做相角穿越频率，它满足 $G_0(\mathrm{j}\omega_g) = -180°$。如图 2.5.4 所示。

K_g 的含义为，如果系统的开环增益增大为原来的 K_g 倍时，闭环系统处于临界稳定（奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 与点 $(-1,\mathrm{j}0)$ 相交）状态。

将开环增益乘上一个系数 β，β 是可变的，则得 $\beta G_0(\mathrm{j}\omega)$。在标称情况下，$\beta = 1$。由定理 2.4.2，最优调节器系统是稳定的。当 β 变化时，根据奈氏判据，只要奈氏曲线 $\beta G_0(\mathrm{j}\omega)$ 逆时针方向围绕点 $(-1, \mathrm{j}0)$ 的圈数等于 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 在右半复平面上的极点数，则最优调节器系统仍是稳定的。或等价地说，只要奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 逆时针围绕点 $(-\frac{1}{\beta}, \mathrm{j}0)$ 的圈数等于 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 在右半复平面内的极点数，则最优调节器系统就是稳定的 。

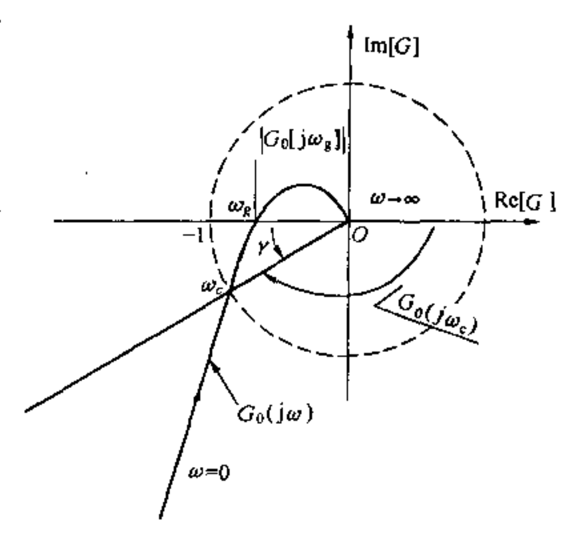


图 2.5.4 稳定裕度

从最优调节器的奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 的特性可知，奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 围绕点 $(-1,\mathrm{j}0)$ 的圈数等于围绕以点 $(-1,\mathrm{j}0)$ 为圆心的单位圆内任一点的圈数。只要 $\beta > \frac{1}{2}$，点 $(-\frac{1}{\beta},\mathrm{j}0)$ 就包含在以点 $(-1,\mathrm{j}0)$ 为圆心的单位圆内。所以当 $\beta > \frac{1}{2}$ 时，奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 逆时针围绕点 $(-\frac{1}{\beta},\mathrm{j}0)$ 的圈数等于 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 在右半复平面内的极点数。因此，当 $\beta > \frac{1}{2}$ 时，最优调节器系统仍保持着稳定性，即最优调节器系统的增益稳定裕度 $K_g \in (\frac{1}{2}, \infty)$。注意，$\beta = \frac{1}{2}$ 时，$|G_0(\mathrm{j}\omega)| = 2$；$\beta = \infty$ 时，$|G_0(\mathrm{j}\omega)| = 0$。

当然，上述结果只是理论上的，实际的控制系统还有许多因素没有考虑。当实际系统的增益大到一定程度，系统就会失去稳定性。

【定义 2.5.2】（相角稳定裕度） 当开环奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 的幅值等于 1 时，$G_0(\mathrm{j}\omega)$ 的相角与 $-180°$ 线（负实轴）间的夹角被定义为相角稳定裕度 γ。即

$$\gamma = 180° + G_0(\mathrm{j}\omega_c) \tag{2.5.5}$$

其中频率 ω_c 叫做幅值穿越频率，它满足 $|G_0(\mathrm{j}\omega_c)| = 1$。如图 2.5.4 所示。

γ 的含义为，如果系统对频率为 ω_c 的信号的相角滞后再增大 γ 度，闭环系统处于临界稳定状态。

由最优调节器的频率条件(2.5.3)可知，奈氏曲线 $G_0(\mathrm{j}\omega)$ 不会进入点 $(-1,\mathrm{j}0)$ 为圆心的单位圆内。再根据相角稳定裕度的定义，我们在复平面上分别做以点 $(-1,\mathrm{j}0)$ 为圆心的单位圆和以原点为圆心的单位圆，如图 2.5.5 所示。这两个圆有两个交点 $(-\frac{1}{2}, -\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2})$ 和 $(-\frac{1}{2},$

$j\frac{\sqrt{3}}{2}$)。它们与原点的连线和负实轴的夹角分别为 60°和 −60°。所以，最优调节器系统的相角稳定裕度最小为 60°，即 $\gamma \geqslant 60°$。

综上所述，最优调节器系统的增益稳定裕度 $K_g \in (\frac{1}{2}, \infty)$，相角稳定裕度 $\gamma \geqslant 60°$。因此，当系统的某些参数在一定范围内变化时，仍能稳定地工作。

图 2.5.5 相角裕度

2.6 具有指定衰减度的 LQR 问题

具有指定衰减度的 LQR 问题是指闭环方程(2.4.7)的解 $x^*(t)$将以不小于规定的速度趋于平衡点。

【问题 2.6.1】 给定线性定常系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \tag{2.6.1}$$

和二次型性能指标

$$J[u(\cdot)] = \int_0^\infty e^{2\alpha t}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \tag{2.6.2}$$

α 是大于零的常数，$Q = C^TC$。(A, B)能控，(C, A)能观测。求解最优控制 $u^*(t)$，使性能指标(2.6.2)达极小值，且使

$$\lim_{t\to\infty} x^*(t)e^{\alpha t} = 0 \tag{2.6.3}$$

该问题的求解是通过变量变换的方法，将其转化为 2.4 节给出的标准 LQR 问题。为此，引入新的状态变量

$$x_1(t) = x(t)e^{\alpha t}, u_1(t) = u(t)e^{\alpha t} \tag{2.6.4}$$

它们满足

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) = \frac{d}{dt}[x(t)e^{\alpha t}] = \dot{x}(t)e^{\alpha t} + \alpha x(t)e^{\alpha t} = [Ax(t) + Bu(t)]e^{\alpha t} + \alpha x_1(t) = \\ Ax_1(t) + \alpha x_1(t) + Bu_1(t) = (\alpha I + A)x_1(t) + Bu_1(t)\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

根据变换式(2.6.4)，性能指标(2.6.2)可改写为

$$J[u_1(\cdot)] = \int_0^\infty [x_1^T(t)Qx_1(t) + u_1^T(t)Ru_1(t)]dt \tag{2.6.6}$$

这样，问题 2.6.1 就等价于由式(2.6.5)和式(2.6.6)描述的标准 LQR 问题，并使

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$$

成立，当然，此时要求$(A + \alpha I, B)$能控，$(C, A + \alpha I)$能观测。关于这个问题，有如下结论：如果(A, B)是能控的，(C, A)是能观测的，则$(A + \alpha I, B)$和$(C, A + \alpha I)$也分别是能控和能观测的。

将以上讨论归纳为如下定理。

【定理 2.6.1】 对于问题 2.6.1 的具有指定衰减度 α 的无限时间 LQR 问题，使性能指标(2.6.2)极小

$$J^*[u^*(\cdot)] = x_0^T P_\alpha x_0 \tag{2.6.7}$$

的充分必要条件是

$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_\alpha e^{\alpha t}x^*(t) \tag{2.6.8}$$

其中 P_α 是如下 Riccati 代数方程

$$(A+\alpha I)^{\mathrm{T}}P_\alpha + P_\alpha(A+\alpha I) - P_\alpha BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_\alpha + Q = 0 \tag{2.6.9}$$

的正定对称解，而最优轨线 $x^*(t)$满足闭环方程

$$\dot{x}^*(t) = (A+\alpha I - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_\alpha)x^*(t),\ x^*(0) = x_0 \tag{2.6.10}$$

这种将具有指定衰减度的 LQR 问题转化为标准 LQR 问题的方法，也可用于求解 2.2 节提到的输出调节器问题和输出跟踪问题。下节给出输出调节器问题的解，输出跟踪问题的求解可参阅文献[9]、[11]等。

2.7 输出调节器问题

本节我们来求解输出调节器问题。

【问题 2.7.1】 给定被控系统的状态方程和输出方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ x(t_0) = x_0 \tag{2.7.1a}$$

$$y(t) = C(t)x(t) \tag{2.7.1b}$$

以及关于输出变量和控制变量的二次型性能指标

$$J[u(\cdot)] = \frac{1}{2}y^{\mathrm{T}}(t_f)Fy(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[y^{\mathrm{T}}(t)Q(t)y(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]\mathrm{d}t \tag{2.7.2}$$

其中 $Q^{\mathrm{T}}(t)=Q(t)\geqslant 0, R^{\mathrm{T}}(t)=R(t)>0$。求最优控制 $u^*(t)$，使 $J[u(\cdot)]$达极小值。其中 $u(t)$不受约束，终端时刻 t_f 固定。

假设系统(2.7.1)(C,A)完全能观测。

处理上述(有限时间)输出调节器问题的基本思想是将输出调节器问题转化为状态调节器问题，然后，应用前面关于状态调节器的结果，设计相应的控制律。

将输出方程(2.7.1b)代入性能指标(2.7.2)中，得

$$\begin{aligned} J[u(\cdot)] = &\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)C^{\mathrm{T}}(t_f)FC(t_f)x(t_f) + \\ &\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

把上式与状态调节器问题的性能指标(2.3.2)加以比较，发现它们的结构形式相同，区别在于式(2.3.2)中的加权阵 F 和 $Q(t)$，在式(2.7.3)中分别换成了 $C^{\mathrm{T}}(t_f)FC(t_f)$和 $C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)$。因此，只要我们能证明 $C^{\mathrm{T}}(t_f)FC(t_f)$和 $C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)$是非负定对称阵，就建立起式(2.3.2)和式(2.7.3)之间的对应关系，从而，将输出调节器问题转化为等效的状态调节器问题。于是，有关状态调节器的结论，都适用于输出调节器。

【证明】 因为 $F, Q(t)$为对称阵，所以

$$[C^{\mathrm{T}}(t_f)FC(t_f)]^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}(t_f)F^{\mathrm{T}}C(t_f) = C^{\mathrm{T}}(t_f)FC(t_f)$$

$$[C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)]^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}(t)Q^{\mathrm{T}}(t)C(t) = C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)$$

即矩阵 $C^{\mathrm{T}}(t_f)FC(t_f)$和 $C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)$对称。

又因为 $Q(t)\geqslant 0$，所以对任意向量 $y(t)\neq 0$，有

$$y^{\mathrm{T}}(t)Q(t)y(t)\geqslant 0$$

由于 $y(t)=C(t)x(t)$，则对任意 $C(t)x(t)\neq 0$，下式成立

$$x^{T}(t)C^{T}(t)Q(t)C(t)x(t)\geqslant 0$$

利用(C,A)完全能观测的假设，上式对任意 $x(t)\neq 0$ 成立，即

$$C^{T}(t)Q(t)C(t)\geqslant 0$$

同理可证，$C^{T}(t_f)FC(t_f)\geqslant 0$。 **证毕**

现在，我们将定理 2.3.1 推广应用于输出调节器问题，得如下有限时间输出调节器问题的解。

【定理 2.7.1】 给定完全能观测线性系统(2.7.1)和性能指标(2.7.2)，其中 $u(t)$不受约束，t_f 固定，则最优控制

$$u^{*}(t)=-R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t)x(t) \tag{2.7.4}$$

存在且惟一。其中 $P(t)$是 Riccati 方程

$$\dot{P}(t)=-P(t)A(t)-A^{T}(t)P(t)+P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t)-C^{T}(t)Q(t)C(t) \tag{2.7.5a}$$

满足边界条件

$$P(t_f)=C^{T}(t_f)FC(t_f) \tag{2.7.5b}$$

的解。最优轨线 $x^{*}(t)$由下式确定

$$\dot{x}^{*}(t)=[A(t)-B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t)]x^{*}(t),x^{*}(t_0)=x_0 \tag{2.7.6}$$

最优性能指标函数为

$$J^{*}[x(t_0),t_0]=\frac{1}{2}x^{T}(t_0)P(t_0)x(t_0) \tag{2.7.7}$$

最优控制(2.7.4)与系统(2.7.1)构成的闭环系统框图如图 2.7.1 所示。由图可见，输出调节器问题的反馈结构仍为状态反馈，而不是输出反馈。

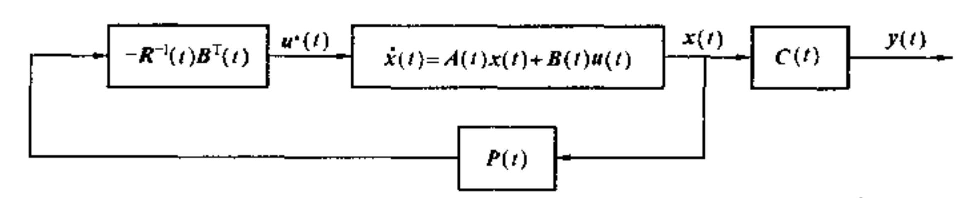


图 2.7.1 输出调节器问题的闭环结构

类似地，由定理 2.4.1 可得如下无限时间输出调节器问题的解。

【定理 2.7.2】 给定完全能控，完全能观测线性定常系统(2.7.1)和性能指标

$$J[u(\cdot)]=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}[y^{T}(t)Qy(t)+u^{T}(t)Ru(t)]dt \tag{2.7.8}$$

其中 $Q\geqslant 0,R>0,u(t)$不受约束，则最优控制

$$u^{*}(t)=-R^{-1}B^{T}Px(t) \tag{2.7.9}$$

存在且惟一。其中 P 为代数 Riccati 方程

$$PA+A^{T}P-PBR^{-1}B^{T}P+C^{T}QC=0 \tag{2.7.10}$$

的解。最优轨线 $x^{*}(t)$由下式确定

$$\dot{x}^{*}(t)=[A-BR^{-1}B^{T}P]x^{*}(t),x^{*}(0)=x_0 \tag{2.7.11}$$

性能指标(2.7.8)的最优值为

$$J^{*}[x(0)]=\frac{1}{2}x^{T}(0)Px(0) \tag{2.7.12}$$

【例 2.7.1】 已知状态方程和输出方程

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[1 \quad 0]x(t)$$

性能指标函数

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[y^2(t)+ru^2(t)]\mathrm{d}t,\ r>0$$

试构造输出调节器,使 J 达极小值。

【解】 我们有

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},C=[1 \quad 0],Q=1,R=r$$

$$\mathrm{rank}[B \quad AB]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=2,\mathrm{rank}\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2$$

所以,被控系统完全能控且能观测。由定理 2.7.2,有

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t)=-\frac{1}{r}[0 \quad 1]\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=-\frac{1}{r}[P_{12}x_1(t)+P_{22}x_2(t)]$$

解代数 Riccati 方程(2.7.10),得

$$\frac{1}{r}P_{12}^2=1$$

$$-P_{11}+\frac{1}{r}P_{12}P_{22}=0$$

$$-2P_{12}+\frac{1}{r}P_{22}^2=0$$

为保证 $P>0$,取上述方程组的解 $P_{12}=\sqrt{r},P_{22}=\sqrt{2}r^{\frac{3}{4}},P_{11}=\sqrt{2}r^{\frac{1}{4}}$。所以

$$u^*(t)=-r^{-\frac{1}{2}}x_1(t)-r^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}x_2(t)=-r^{-\frac{1}{2}}y(t)-r^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}\dot{y}(t)$$

相应的闭环系统框图如图 2.7.2 所示。由图可知,前向通道传函为$\frac{1}{s^2}$,反馈通道传函为 $r^{-\frac{1}{2}}+r^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}s$。

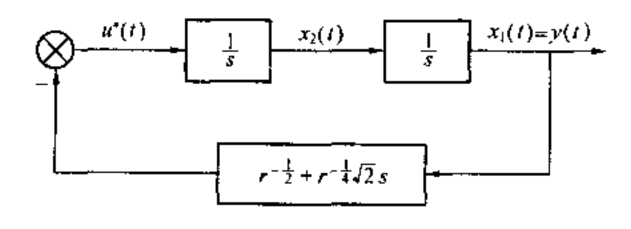


图 2.7.2 最优闭环系统

闭环系统传函为

$$\Phi(s)=\frac{1}{s^2+\sqrt{2}r^{-\frac{1}{4}}s+r^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

为典型的二阶系统。其中无阻尼自然振荡角频率 $\omega_n=r^{-\frac{1}{4}}$,阻尼比 $\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707$(最佳阻尼比)。可见,所设计的最优控制 $u^*(t)$,使闭环系统具有较好的瞬态调节性能。改变 r(控制能

量)，ζ 不变，只影响输出响应的振荡频率。

2.8 LQG 问题

前面几节讨论了基于确定性系统模型的 LQ 问题。但是，要得到系统的确定性模型，经常是极困难的。因此，实际上比较逼真的系统模型，应该是此系统的随机过程模型，并且要根据该系统的不完全的状态量测值，确定最优控制。

本节考虑的系统状态模型是线性的(Linear)，性能指标是二次型的(Quadratic)，而状态向量的分布是高斯的(Gaussian)。这样的控制问题称为线性二次型高斯控制问题，简称为 LQG 问题。

2.8.1 有限时间 LQG 问题

现考虑用随机状态方程和量测方程描述的线性系统。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2.8.1}$$

$$z(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \tag{2.8.2}$$

其中状态 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，控制 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^p$，观测输出 $z\in\mathbf{R}^q$。假设初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)$是高斯型，其均值为 $\overline{\boldsymbol{x}}(t_0)$，协方差阵 $\boldsymbol{P}_2(t_0)=\boldsymbol{P}_{20}$为对称非负定的。又假设过程噪声$\{\boldsymbol{w}(t), t\in[t_0, t_f]\}$和量测噪声$\{\boldsymbol{v}(t), t\in[t_0, t_f]\}$都是零均值的白高斯过程，且具有协方差阵

$$\mathrm{Cov}[\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{w}(\tau)] = \boldsymbol{Q}_2(t)\delta(t-\tau)$$

和

$$\mathrm{Cov}[\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{v}(\tau)] = \boldsymbol{R}_2(t)\delta(t-\tau)$$

此外，还假设 $\boldsymbol{x}(t_0)$、$\{\boldsymbol{w}(t)\}$和$\{\boldsymbol{v}(t)\}$均相互独立。

随机系统的性能用加权二次型性能指标

$$J = E\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_1(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_1(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t\} \tag{2.8.3}$$

表征，并希望它极小。由于$\{\boldsymbol{x}(t)\}$是随机过程，把整个二次型取均值是合适的。假设 $\boldsymbol{R}_1(t)$和 $\boldsymbol{R}_2(t)$均为正定对称阵，而 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{Q}_1(t)$和 $\boldsymbol{Q}_2(t)$均为非负定对称阵。

【定义 2.8.1】(容许控制)　令 $z(t)=\{z(s), t_0\leqslant s\leqslant t_f\}$，为量测数据集合。如果

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\alpha}[t, z(t)], t\in[t_0, t] \tag{2.8.4}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是适当光滑的函数，则称控制函数 $\boldsymbol{u}(t)$是容许的。

【问题 2.8.1】　对随机控制系统(2.8.1)和(2.8.2)，求解使性能指标(2.8.3)达极小值的容许控制 $\boldsymbol{u}^*(t)$。

在以下讨论中，将用到数学期望(条件均值)的如下性质[12]：

(1)
$$E\{E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}]\} = E\{\boldsymbol{x}\} \tag{2.8.5}$$

(2)
$$E\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}\} = \overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{x}} + \mathrm{trace}\{\boldsymbol{M}\mathrm{Cov}[\boldsymbol{x}]\} \tag{2.8.6}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 是一个均值为 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 的随机变量。

利用式(2.8.5)，可将性能指标(2.8.3)改写为更适合于以下分析的形式

$$J = E\{E[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f) \mid z(t_f)]\} + E\{\int_{t_0}^{t_f}E\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_1(t)\boldsymbol{x}(t) \mid z(t)\}\mathrm{d}t\} +$$

$$E\left\{\int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_1(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t\right\} \tag{2.8.7}$$

于是,由式(2.8.6)和式(2.8.7),有

$$\begin{aligned} J = & E\{\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t_f)\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}[\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_1(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t\} + \\ & E\{\mathrm{trace}[\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{Q}_1(t)\boldsymbol{P}_2(t)\mathrm{d}t]\} \end{aligned} \tag{2.8.8}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) = E\{\boldsymbol{x}(t) \mid \boldsymbol{z}(t)\}$$
$$\boldsymbol{P}_2(t) = E\{[\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)][\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)]^{\mathrm{T}} \mid \boldsymbol{z}(t)\}$$

可以证明,在噪声统计特性是高斯分布情况下的条件均值滤波器 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$就是最优线性滤波器(卡尔曼滤波器)[12]。因此,条件均值滤波 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$和估计误差协方差阵 $\boldsymbol{P}_2(t)$满足卡尔曼滤波递推方程式[12]

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{K}_2(t)[\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{C}(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t)] \\ \hat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \bar{\boldsymbol{x}}(t_0) \end{cases} \tag{2.8.9}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_2(t) = \boldsymbol{P}_2(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_2^{-1}(t) \tag{2.8.10}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{P}}_2(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{P}_2(t) + \boldsymbol{P}_2(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t) - \boldsymbol{P}_2(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_2^{-1}(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{P}_2(t) + \boldsymbol{Q}_2(t) \\ \boldsymbol{P}_2(t_0) = \boldsymbol{P}_{20} \end{cases} \tag{2.8.11}$$

方程(2.8.11)称为估计器的 Riccati 方程,$\boldsymbol{K}_2(t)$称为估计增益阵。值得注意的是,$\boldsymbol{P}_2(t)$与量测值和控制设定值无关,而是确定性的。这意味着式(2.8.8)右边最后一项不受数学期望运算的影响,而且也不会影响控制的选择。由此,使 J 达极小也等效于使下式为极小

$$J' = E\{\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t_f)\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}[\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_1(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t\} \tag{2.8.12}$$

式(2.8.9)中的 $\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{C}(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t)$称为新息过程。可以证明[12],[15],它是零均值的高斯过程,且具有协方差阵

$$E\{[\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{C}(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t)][\boldsymbol{z}(\tau) - \boldsymbol{C}(\tau)\hat{\boldsymbol{x}}(\tau)]^{\mathrm{T}}\} = \boldsymbol{R}_2(t)\delta(t-\tau)$$

因此,式(2.8.9)~(2.8.12)构成了问题 2.8.1 的一个等效的控制问题:即对系统(2.8.9),求解使性能指标(2.8.12)达极小值的容许控制 $\boldsymbol{u}^*(t)$。要注意,此等效问题是假设状态过程能观测的,也就是说,现在的状态是 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$,它是可估计的。

利用动态规划方法[12],[13],能够证明,服从式(2.8.9),使式(2.8.12)达极小的最优容许控制是

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}_1^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{K}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t) \tag{2.8.13}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_1(t) = -\boldsymbol{R}_1^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1(t) \tag{2.8.14}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{P}}_1(t) = -\boldsymbol{P}_1(t)\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1(t) + \boldsymbol{P}_1(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}_1^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1(t) - \boldsymbol{Q}_1(t) \\ \boldsymbol{P}_1(t_f) = \boldsymbol{F} \end{cases} \tag{2.8.15}$$

方程(2.8.15)称为控制器的 Riccati 方程。$K_1(t)$称为控制增益阵。

同时可以证明,在区间$[t,t_f]$内,性能指标的最优值为

$$J'[\hat{x}(t),t] = \hat{x}^{\mathrm{T}}(t)P_1(t)\hat{x}(t) + \mathrm{trace}\left\{\int_t^{t_f} K_2(t)R_2(t)K_2^{\mathrm{T}}(t)P_1(t)\mathrm{d}t\right\}$$

而在整个区间$[t_0,t_f]$内,性能指标的最优值为

$$J = \overline{x}^{\mathrm{T}}(t_0)P_1(t_0)\overline{x}(t_0) + \mathrm{trace}\left\{\int_{t_0}^{t_f} K_2(t)R_2(t)K_2^{\mathrm{T}}(t)P_1(t)\mathrm{d}t\right\} + \mathrm{trace}\left\{FP_2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} Q_1(t)P_2(t)\mathrm{d}t\right\} \qquad (2.8.16)$$

其中第二求迹项由式(2.8.8)得到。

有限时间 LQG 问题的方框图如图 2.8.1 所示。

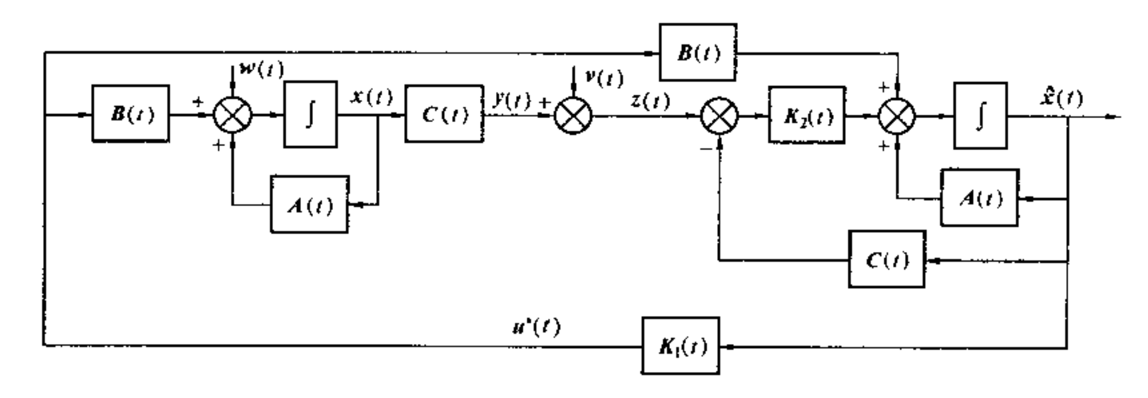


图 2.8.1　估计与控制结合的最优调节系统

由图可清楚地看出,此种结构的线性最优调节系统由两部分构成,即估计器和控制器的结合。

将以上结果归纳为定理形式。

【定理 2.8.1】　对由式(2.8.1)~(2.8.3)描述的连续时间随机模型的有限时间 LQG 问题,使性能指标(2.8.3)达极小的最优控制(即问题 2.8.1 的解)为

$$u^*(t) = K_1(t)\hat{x}(t) = -R_1^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P_1(t)\hat{x}(t)$$

这里 $P_1(t)$为 Riccati 方程(2.8.15)的解。最优滤波 $\hat{x}(t)$由式(2.8.9)~(2.8.11)给出。最优性能指标为式(2.8.16)。

定理 2.8.1 的结果称为分离定理或必然等价原理[15]。最优控制的计算分为两部分,一部分是计算最优滤波 $\hat{x}(t)$(计算估计增益阵 $K_2(t)$);另一部分是计算控制增益阵 $K_1(t)$。决定性的一点是这两部分的计算在某种意义上是独立的,最优滤波 $\hat{x}(t)$的计算与性能指标参数 F、$Q_1(t)$和 $R_1(t)$无关,这三个参数定义了控制问题;控制增益阵 $K_1(t)$的计算也不依赖于 P_{20}、$Q_2(t)$和 $R_2(t)$等噪声参数。两部分计算,基本独立进行,故称为分离定理。如果用实际状态 $x(t)$代替最优滤波 $\hat{x}(t)$,最优控制计算同样进行,所以分离定理也称为必然等价原理。

2.8.2　稳态 LQG 问题

考虑线性定常系统的情况,即矩阵 A、B、C、Q_1、Q_2、R_1 和 R_2 均为常阵,且取 $t_0=0$, $t_f \to \infty$。此时,把性能指标(2.8.3)修改为

$$J_r = \lim_{T\to\infty} \frac{J_T}{T} \tag{2.8.17}$$

称为价值率函数[14]。其中

$$J_T = E\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(T)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(T) + \int_0^T [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t\} \tag{2.8.18}$$

对于有限的 T,由于考虑的是定常系统,式(2.8.13)的最优控制为

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t) \tag{2.8.19}$$

这里,由式(2.8.15),有

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{P}}_1(t) = -\boldsymbol{P}_1(t)\boldsymbol{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(t) + \boldsymbol{P}_1(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(t) - \boldsymbol{Q}_1 \\ \boldsymbol{P}_1(T) = \boldsymbol{F} \end{cases} \tag{2.8.20}$$

而由式(2.8.9)、(2.8.10)和式(2.8.11),有

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{K}_2(t)[\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)] \\ \hat{\boldsymbol{x}}(0) = \bar{\boldsymbol{x}}(0) \end{cases} \tag{2.8.21}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_2(t) = \boldsymbol{P}_2(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2^{-1} \tag{2.8.22}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{P}}_2(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2(t) + \boldsymbol{P}_2(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{P}_2(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_2(t) + \boldsymbol{Q}_2 \\ \boldsymbol{P}_2(0) = \boldsymbol{P}_{20} \end{cases} \tag{2.8.23}$$

确切地说,式(2.8.20)的解 $\boldsymbol{P}_1(t)$与 T 和 $\boldsymbol{F}$ 有关。同样,式(2.8.23)的解 $\boldsymbol{P}_2(t)$与时刻 $t_0 = 0$ 和 $\boldsymbol{P}_2(0) = \boldsymbol{P}_{20}$有关。因此,记

$$\boldsymbol{P}_1(t) = \boldsymbol{P}_1(t, T, \boldsymbol{F}), \boldsymbol{P}_2(t) = \boldsymbol{P}_2(t, 0, \boldsymbol{P}_{20})$$

类似于 2.3 节,Riccati 方程(2.8.20)和(2.8.23)的解 $\boldsymbol{P}_1(t)$、$\boldsymbol{P}_2(t)$具有如下性质:

(1) 当 $T\to\infty$时,极限

$$\lim_{T\to\infty}\boldsymbol{P}_1(t, T, \boldsymbol{F})\text{和}\lim_{t\to\infty}P_2(t, 0, P_{20})$$

是有界的。

(2) 若被控系统是能控和能观测的,则对任何非负定的 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{P}_{20}$,有

$$\lim_{T\to\infty}\boldsymbol{P}_1(t, T, \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{P}_1 = \text{常阵} \tag{2.8.24}$$

$$\lim_{t_0\to\infty}\boldsymbol{P}_2(t, -t_0, \boldsymbol{P}_{20}) = \boldsymbol{P}_2 = \text{常阵} \tag{2.8.25}$$

此时,Riccati 微分方程(2.8.20)、(2.8.23)退化为 Riccati 代数方程

$$-\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{0} \tag{2.8.26}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{0} \tag{2.8.27}$$

最后,将以上稳态 LQG 问题的结果归纳为如下定理。

【定理 2.8.2】 如果线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t)$$

是能控的和能观测的,则在稳态($T\to\infty$)下,最优控制为

$$\boldsymbol{u}^*(t) = \boldsymbol{K}_1\hat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{K}_1 = -\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1$$

式中 $\boldsymbol{P}_1$ 为 Riccati 代数方程(2.8.26)的解,$\hat{\boldsymbol{x}}(t)$满足

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{K}_2[\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)],\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\bar{\boldsymbol{x}}(0)$$

$$\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2^{-1}$$

$\boldsymbol{P}_2$ 为 Riccati 代数方程(2.8.27)的解。

同样,定理 2.8.2 也称为分离定理。

习　　题

2.1　给定一阶被控系统

$\dot{x}(t)=x(t)+u(t),x(0)=1,t_f$ 固定,$x(t_f)$可变。试应用极大值原理求最优控制 $u^*(t)$,使性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_0^2[x^2(t)+u^2(t)]\mathrm{d}t$$

达极小值。

2.2　给定一阶被控系统

$\dot{x}(t)=x(t)-u(t),x(0)=5,t_f$ 固定,$x(t_f)$可变。其中 $u(t)$受不等式约束

$$0.5\leqslant u(t)\leqslant 1$$

试应用极大值原理确定最优控制 $u^*(t)$,使性能指标

$$J=\int_0^1[x(t)+u(t)]\mathrm{d}t$$

达极小值。

2.3　给定一阶被控系统

$$\dot{x}(t)=u(t),x(1)=3$$

和性能指标

$$J=x^2(5)+\frac{1}{2}\int_1^5 u^2(t)\mathrm{d}t$$

试应用定理 2.3.1 求最优控制 $u^*(t)$,使 J 达极小值。

2.4　给定二阶被控系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

和性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[x_1^2(t)+2bx_1(t)x_2(t)+ax_2^2(t)+u^2(t)]\mathrm{d}t$$

试应用定理 2.4.1 求最优控制 $u^*(t)$,使 J 达极小值(其中 $a-b^2>0$)。

2.5　已知系统的状态方程和输出方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t),\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

$$y(t)=[1\quad 0]\boldsymbol{x}(t)$$

和性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}[y^{2}(t)+u^{2}(t)]\mathrm{d}t$$

试构造最优输出调节器,使 J 达极小值。

2.6 给定随机状态方程和量测方程

$$\dot{x}(t)=-\frac{1}{2}x(t)+u(t)+w(t),x(0)=10$$

$$z(t)=x(t)+v(t)$$

其中 $R_2=\frac{1}{4}$, $Q_2=2$,和价值率函数

$$J_r=\lim_{t_f\to\infty}\frac{J_{t_f}}{t_f}$$

其中

$$J_{t_f}=E\{\frac{1}{2}x^2(t_f)S+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\}[2x^2(t)+u^2(t)]\mathrm{d}t$$

试应用定理 2.8.2 求控制增益 K_1 和估计增益 K_2。K_1 与 K_2 的计算是否是相互独立的?

第三章　参数化控制器设计

30年代开始发展起来的古典控制理论(频率域方法)能较好地处理 SISO 控制系统的分析和综合问题。利用频率域方法对控制系统进行设计具有物理概念清晰的特点。例如在 Bode 图上采用回路成形技术[16],可以直观地对控制系统的鲁棒性能进行设计,以使控制系统对被控对象的微小变化(模型的微小摄动)仍保持稳定性(鲁棒稳定)和满足一定的系统性能(鲁棒性能),尽管频率域方法是一种图解法、试凑法,由于上述优点和其它一些优点,长期以来,一直在工业控制系统设计中处于主导地位,易于被控制工程师们所接受。直到 70 年代后期,Youla[21]等人证明,对于一般的控制系统可以采用一种有效的方法参数化所有稳定的控制器,参数化过程保证了最终的反馈控制器自动地产生一个闭环稳定的控制系统。可以说,在某种意义上,正是由于 Youla 的参数化控制器和 Zames[23]以及 Doyle[24]等人的工作,开辟了反馈控制理论的新纪元[25]。

本章将介绍 Youla 的内稳定控制器参数化结果及其应用,以及近年来得到的同时镇定控制器参数化结果及其应用。目的在于引进近代频域控制理论的一些基本概念和方法,因为这些概念和方法对本书后续章节的学习也是必要的。

3.1　内稳定控制器参数化

有理函数(矩阵)的互质分解理论、闭环系统内稳定性概念以及 Youla 的内稳定控制器参数化结果,在近代频域控制理论中起着重要的作用。众所周知,稳定性是对控制系统的最基本的要求。在保证闭环系统的内稳定的前提下,利用控制器参数化公式,对控制系统的各种性能进行设计,这正是 Youla 的内稳定控制器参数化结果的贡献所在。本节将对上述基本概念作简单介绍,使读者对近代频域最优控制理论有一初步的了解。详细的讨论可参见文献[17]、[18]、[19]。

3.1.1　有理函数(矩阵)的互质分解

【定义 3.1.1】(正则、严格正则)　若 $g(\infty)$是有理常量(零或非零),则称有理函数 $g(s)$是正则的。若 $g(\infty)=0$,则称 $g(s)$是严格正则的。若 $G(\infty)$是有限常量矩阵,则称有理函数矩阵 $G(s)$是正则的。若 $G(\infty)=\mathbf{0}$,由称 $G(s)$是严格正则的。

【定义 3.1.2】(幺模阵)　设 $U(s)$为有理函数方阵。若 $U(s),U^{-1}(s)\in RH_\infty$,则称 $U(s)$为幺模阵。

非奇异常阵、幺模阵的逆矩阵以及幺模阵的乘积均为幺模阵。

【定义 3.1.3】(右公约式)　设 $N(s),M(s)\in RH_\infty$具有相同的列数。若存在 $\overline{N}(s)$、$\overline{M}(s)$,$R(s)\in RH_\infty$,使得

$$N(s)=\overline{N}(s)R(s),M(s)=\overline{M}(s)R(s)$$

则称 $R(s)$为 $N(s)$和 $M(s)$的右公约式。

【定义 3.1.4】(右互质) 称 $N(s), M(s) \in RH_\infty$ 为右互质,当且仅当存在 $X(s), Y(s) \in RH_\infty$,使得

$$X(s)M(s) + Y(s)N(s) = I \tag{3.1.1}$$

上式称为 Bezout 等式。

由定义可知,$N(s)$和 $M(s)$为右互质的充分必要条件是 $N(s)$和 $M(s)$除幺模阵以外不具有其它右公约式。

与定义 3.1.3 和定义 3.1.4 类似,可以定义具有相同行数的矩阵的左公约式和左互质性。

一个正则有理函数矩阵 $G(s)$的右互质分解是指 $G(s) = N(s)M^{-1}(s)$,其中 $N(s)$, $M(s) \in RH_\infty$是右互质矩阵。类似地,如果 $G(s) = \widetilde{M}^{-1}(s)\widetilde{N}(s)$,其中 $\widetilde{N}(s), \widetilde{M}(s) \in RH_\infty$是左互质矩阵,则 $\widetilde{M}(s), \widetilde{N}(s)$是 $G(s)$的左互质分解。以上定义中,$M(s), \widetilde{M}(s)$均为非奇异方阵。

正则有理函数矩阵 $G(s)$的一种更一般的互质分解,称为双互质分解(doubly coprime factorization),由下列定理给出。

【定理 3.1.1】 正则有理函数矩阵 $G(s)$,设其状态空间实现$[A, B, C, D]$能稳定、能检测,则存在 8 个属于 RH_∞的矩阵

$$\begin{aligned}
&M(s) = [A_F, B, F, I], N(s) = [A_F, B, C_F, D] \\
&\widetilde{M}(s) = [A_H, H, C, I], \widetilde{N}(s) = [A_H, B_H, C, D] \\
&X(s) = [A_F, -H, C_F, I], Y(s) = [A_F, H, F, 0] \\
&\widetilde{X}(s) = [A_H, -B_H, F, I], \widetilde{Y}(s) = [A_H, H, F, 0]
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

其中

$$A_F = A + BF, C_F = C + DF$$
$$A_H = A + HC, B_F = B + HD$$

满足:

(1) $M(s), \widetilde{M}(s)$是非奇异的。

(2)
$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \widetilde{M}^{-1}(s)\widetilde{N}(s) \tag{3.1.3}$$

(3)
$$\begin{bmatrix} \widetilde{X} & \widetilde{Y} \\ -\widetilde{N} & \widetilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -Y \\ N & X \end{bmatrix} = I \tag{3.1.4}$$

该定理的证明见文献[17]。式(3.1.2)给出了双互质分解的求解方法,选择矩阵 F、H,使 A_F、A_H 具有稳定的特征值,即可实现稳定的双互质分解。

【例 3.1.1】 给定 2×2 维正则有理函数矩阵

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}\begin{bmatrix} 2(s-1) & 2 \\ s-1 & s-1 \end{bmatrix}$$

求得 $G(s)$的一个最小实现为 $G(s) = [A, B, C, D]$,其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

选择 F,使 $A_F=A+BF$ 的特征值为$[-1,-1,-1]$,则可得

$$F=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix},A_F=\begin{bmatrix}2 & -3 & 6\\ 3 & -4 & 4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

选择 H,使得 $A_H=A+HC$ 的特征值为$[-1,-1,-1]$,则可得

$$H=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix},A_H=\begin{bmatrix}2 & -4 & 7\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

于是,可求得

$$N(s)=[A_F,B,C_F,0]=\frac{1}{(s+1)^3}\begin{bmatrix}2s^2+5s-11 & 3s+1\\ s^2-2s+4 & s^2\end{bmatrix}$$

$$M(s)=[A_F,B,F,I]=\frac{1}{(s+1)^3}\begin{bmatrix}s^3+2s^2-5s-20 & s^2+4s+1\\ s^2+8s+21 & s^3+2s^2-s\end{bmatrix}$$

$$X(s)=[A_F,-H,C_F,I]=\frac{1}{(s+1)^3}\begin{bmatrix}s^3+3s^2+7s+5 & -s^2+4s+5\\ s^2-1 & s^3+5s^2+4s\end{bmatrix}$$

$$Y(s)=[A_F,H,F,0]=\frac{1}{(s+1)^3}\begin{bmatrix}2s^2+8s+6 & 2s^2+10s+8\\ -2s^2-8s-6 & -2s^2-10s-8\end{bmatrix}$$

其余四个矩阵 $\widetilde{N}(s)$、$\widetilde{M}(s)$、$\widetilde{X}(s)$和 $\widetilde{Y}(s)$可类似求出。因此,$G(s)$的一个右互质分解为 $G(s)=N(s)M^{-1}(s)$。

3.1.2 内稳定性

考虑图 3.1.1 所示 SISO 基本反馈系统。图中 P 为被控对象传函,C 为控制器传函,F 为量测元件传函。r 为参考信号,n 为量测噪声信号,d 为外部干扰信号,y 为被控输出信号,v 为量测信号,u 为控制信号。

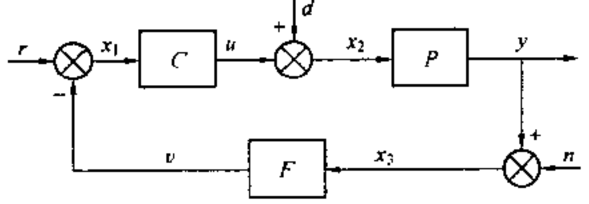


图 3.1.1 基本反馈回路

【定义 3.1.5】(良定性) 图 3.1.1 所示系统被称为是良定的(well-posed),如果图中所有闭环传函都存在,即从三个外部输入 r、d、n 到所有内部信号 u、y、v 以及求和点的输出 x_1、x_2、x_3 之间的传函都存在。

为了获得图 3.1.1 所示系统的良定性,只需考察从 r、d、n 到 x_1、x_2、x_3 的 9 个传函(其它传函可以从这 9 个传函得到)。写出求和点方程

$$x_1=r-Fx_3$$

$$x_2=d+Cx_1$$

$$x_3=n+Px_2$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -C & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

则原系统是良定的，当且仅当上面的 3×3 维矩阵是非奇异的，即

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -C & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix} = 1 + PCF \neq 0$$

9 个传函可从方程

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -C & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + PCF} \begin{bmatrix} 1 & -PF & -F \\ C & 1 & -CF \\ PC & P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \tag{3.1.5}$$

获得。

【定义 3.1.6】(内稳定性)　如果式(3.1.5)的 9 个传函都是稳定的，则称图 3.1.1 所示基本反馈系统是内稳定的，即对所有有界的外部输入信号 r、d、n 和内部信号 x_1、x_2、x_3 及 u、y、v 都是有界的。

对闭环系统提出内稳定的要求是基于如下思想：如果仅要求从 r 到 y 的闭环传函是稳定的，即当 r 有界时，y 也有界，并不能保证某些内部信号是有界的，这种情况对某些控制系统是不允许的，可能引起该实际装置内部结构的损坏，甚至发生事故。

【定理 3.1.2】　图 3.1.1 所示基本反馈系统是内稳定的，当且仅当没有闭环极点在 $\mathrm{Re}\ s \geqslant 0$。

【证明】　对 P、C 和 F 做互质分解

$$P = \frac{N_P}{M_P},\ C = \frac{N_C}{M_C},\ F = \frac{N_F}{M_F}$$

代入式(3.1.5)，整理，得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{N_P N_C N_F + M_P M_C M_F} \begin{bmatrix} M_P M_C M_F & -N_P N_F M_C & N_F M_P M_C \\ N_C M_P M_F & M_P M_C M_F & N_C N_F M_P \\ N_P N_C M_F & N_P M_C M_F & M_P M_C M_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \tag{3.1.6}$$

闭环特证多项式等于 $N_P N_C N_F + M_P M_C M_F$（注意，所有闭环传函的特证多项式是相同的）。可见，如果没有闭环极点在 $\mathrm{Re}\ s \geqslant 0$ 平面内，反馈系统是内稳定的，充分性得证。

下面证明必要性。假设反馈系统是内稳定的，那么式(3.1.5)的 9 个传函都是稳定的，即它们没有极点在 $\mathrm{Re}\ s \geqslant 0$ 平面内。再由互质性条件，可断定闭环特证多项式 $N_P N_C N_F + M_P M_C M_F$ 没有零点在 $\mathrm{Re}\ s \geqslant 0$ 平面内。　　**证毕**

【例 3.1.2】　在图 3.1.1 中，设

$$C(s) = \frac{s-1}{s+1},\ P(s) = \frac{1}{s^2 - 1},\ F = 1$$

可以看到，C、P 和 F 的分子分母均互质。闭环特征多项式

$$N_P N_C N_F + M_P M_C M_F = s - 1 + (s-1)(s+1)^2 = (s-1)(s^2 + 2s + 2)$$

有一个零点 $s = 1$ 在 $\mathrm{Re}\ s \geqslant 0$ 内，故由定理 3.1.2，反馈系统不是内稳定的。

以上讨论了单变量基本反馈系统的良定性和内稳定性。对其它形式的反馈系统以及多变量系统，良定性和内稳定性的定义是类似的。下面的定理给出了图 3.1.1 所示多变量系统的

内稳定性判据。为简便计，设 $F=I$，则得如图 3.1.2 的单位反馈系统。

【定理 3.1.3】 设 $P(s)=N_P(s)M_P^{-1}(s)=\widetilde{M}_P^{-1}(s)\widetilde{N}_P(s)$，且

$$C(s)=N_C(s)M_C^{-1}(s)=\widetilde{M}_C^{-1}(s)\widetilde{N}_C(s)$$

则如下命题等价：

(1) 图 3.1.2 所示单位反馈系统为内稳定。

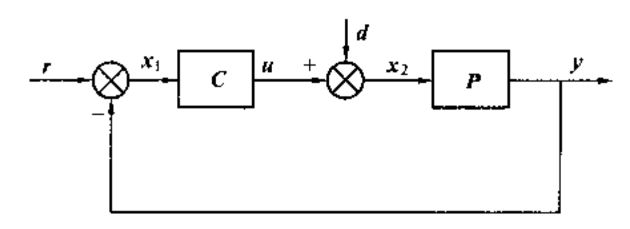


图 3.1.2 单位反馈系统

(2) $\Delta(s)=\widetilde{M}_P(s)M_C(s)+\widetilde{N}_P(s)N_C(s)$是幺模阵。

(3) $\widetilde{\Delta}(s)=\widetilde{M}_C(s)M_P(s)+\widetilde{N}_C(s)N_P(s)$是幺模阵。

【证明】 图 3.1.2 中，两个求和点的输出为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=G(s)\begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix}$$

其中

$$G(s)=\begin{bmatrix} I & P(s) \\ -C(s) & I \end{bmatrix}^{-1} \tag{3.1.7}$$

如果 $\det(I+PC)\neq 0$（良定性）且 $G(s)\in RH_\infty$，则反馈系统是内稳定的。设 $P(s)$和 $C(s)$的双互质分解为

$$P=N_PM_P^{-1}=\widetilde{M}_P^{-1}\widetilde{N}_P \tag{3.1.8}$$

$$\widetilde{X}_PM_P+\widetilde{Y}_PN_P=I,\widetilde{M}_PX_P+\widetilde{N}_PY_P=I$$

$$C=N_CM_C^{-1}=\widetilde{M}_C^{-1}\widetilde{N}_C \tag{3.1.9}$$

$$\widetilde{X}_CM_C+\widetilde{Y}_CN_C=I,\widetilde{M}_CX_C+\widetilde{N}_CY_C=I$$

令

$$\Delta(s)=\widetilde{M}_P(s)M_C(s)+\widetilde{N}_P(s)N_C(s) \tag{3.1.10}$$

$$\widetilde{\Delta}(s)=\widetilde{M}_C(s)M_P(s)+\widetilde{N}_C(s)N_P(s) \tag{3.1.11}$$

则，$\Delta(s),\widetilde{\Delta}(s)\in RH_\infty$。因为

$$\det(I+PC)=\det\widetilde{M}_P^{-1}\det\Delta\det M_C^{-1}=\det\widetilde{M}_C^{-1}\det\widetilde{\Delta}\det M_P^{-1}$$

其中，第二个等式利用了如下事实

$$\det(I+PC)=\det(I+CP)$$

因此，$\det(I+PC)\neq 0$ 等价于 $\det\Delta\neq 0$ 和 $\det\widetilde{\Delta}\neq 0$，即 Δ 和$\widetilde{\Delta}$ 均可逆。

利用分块矩阵求逆公式（见附录），式(3.1.7)成为

$$G(s)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}M_C\\ N_C\end{bmatrix}\Delta^{-1}[\widetilde{M}_P \quad -\widetilde{N}_P]$$

由上式可知，如果 $\Delta^{-1}(s)\in RH_\infty$，则 $G(s)\in RH_\infty$。反之，如果 $G(s)\in RH_\infty$，则上式左乘 $[\widetilde{X}_C \quad \widetilde{Y}_C]\in RH_\infty$，右乘 $[X_P^T \quad -Y_P^T]^T\in RH_\infty$，得 $\Delta^{-1}(s)\in RH_\infty$。

同理，将式(3.1.7)化为

$$G(s)=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-N_P\\ M_P\end{bmatrix}\widetilde{\Delta}^{-1}[\widetilde{N}_C \quad \widetilde{M}_C]$$

可以证明，$G(s)\in RH_\infty$的充分必要条件为 $\widetilde{\Delta}^{-1}(s)\in RH_\infty$。 证毕

当控制器 $C(s)$是稳定的，有如下推论。

【推论 3.1.1】 设 $P(s)=N_P(s)M_P^{-1}(s)=\widetilde{M}_P^{-1}(s)\widetilde{N}_P^{-1}(s)$，且 $C(s)\in RH_\infty$，则如下命题等价：

(1) 图 3.1.2 所示单位反馈系统为内稳定。

(2) $\Delta(s)=\widetilde{M}_P(s)+\widetilde{N}_P(s)C(s)$是幺模阵。

(3) $\widetilde{\Delta}(s)=M_P(s)+C(s)N_P(s)$是幺模阵。

以上我们在频率域定义了线性定常系统的内稳定性概念并且讨论了内稳定性判据。实际上，如果线性定常系统的闭环状态空间实现为 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$(简记为(A,B,C))(注意，实现的直接传输部分在稳定性的研究中不起任何作用，故取 $D=0$)，则上面定义的内稳定性等价于状态空间描述的线性系统(A,B,C)的总体稳定性(有界输入有界状态，有界输入有界输出稳定)，并且如下等价条件成立[18],[20]。

【结论】 若线性定常系统(A,B,C)能控、能观测，则如下诸命题等价：

(1) 系统(A,B,C)总体稳定。

(2) 系统(A,B,C)BIBO 稳定。

(3) 系统(A,B,C)BIBS 稳定。

(4) 系统 $\dot{x}=Ax$ 渐近稳定。

(5) $\mathrm{Re}\,\lambda_i<0,\ \forall\lambda_i\in\lambda(A)$。

(6) 传函(阵)$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 所有极点均具有负实部。

若系统的状态空间实现能控且能观测，则称系统能由传函(阵)完全地表征。上述结论说明，若系统能由其传函(阵)完全地表征，则系统的总体稳定性仅由传函(阵)就可以确定而无需考虑系统的状态空间方程描述。

3.1.3 Youla 参数化

【引理 3.1.1】 考虑图 3.1.2 所示单位反馈系统。设 $P(s)$的双互质分解为式(3.1.8)。控制器 $C(s)$使闭环系统内稳定，当且仅当存在式(3.1.9)的双互质分解，使得

$$\widetilde{M}_P(s)M_C(s)+\widetilde{N}_P(s)N_C(s)=I \tag{3.1.12}$$

$$\widetilde{M}_C(s)M_P(s)+\widetilde{N}_C(s)N_P(s)=I \tag{3.1.13}$$

【证明】 由定理 3.1.3，充分性成立。下证必要性。

设使闭环系统内稳定的控制器为

$$C(s)=N_{C0}(s)M_{C0}^{-1}(s)=\widetilde{M}_{C0}^{-1}(s)\widetilde{N}_{C0}(s)$$

则由定理 3.1.3 知

$$\Delta_0(s)=\widetilde{M}_P(s)M_{C0}(s)+\widetilde{N}_P(s)N_{C0}(s)$$

$$\widetilde{\Delta}_0(s)=\widetilde{M}_{C0}(s)M_P(s)+\widetilde{N}_{C0}(s)N_P(s)$$

为幺模阵。令

$$M_C(s)=M_{C0}\Delta_0^{-1}(s)\in RH_\infty,N_C(s)=N_{C0}(s)\Delta_0^{-1}(s)\in RH_\infty$$

$$\widetilde{M}_C(s)=\widetilde{\Delta}_0^{-1}(s)\widetilde{M}_{C0}(s)\in RH_\infty,\widetilde{N}_C(s)=\widetilde{\Delta}_0^{-1}(s)\widetilde{N}_{C0}(s)\in RH_\infty$$

可验证式(3.1.12)和式(3.1.13)成立,且

$$C(s)=N_C(s)M_C^{-1}(s)=\widetilde{M}_C^{-1}(s)\widetilde{N}_C(s)$$

证毕

【定理 3.1.4】 设 $P(s)$的双互质分解由式(3.1.3)和式(3.1.4)给定,则所有使闭环系统内稳定的控制器 $C(s)$可以表示为

$$C(s)=(Y+MQ)(X-NQ)^{-1}= \tag{3.1.14}$$

$$(\widetilde{X}-Q\widetilde{N})^{-1}(\widetilde{Y}+Q\widetilde{M}) \tag{3.1.15}$$

其中自由参数矩阵 $Q(s)\in RH_\infty$,且使$(X-NQ)$和$(\widetilde{X}-Q\widetilde{N})$可逆。

【证明】 分两步进行。

(1) 证明等式(3.1.15)。令 $Q\in RH_\infty$,且满足$(X-NQ)$和$(\widetilde{X}-Q\widetilde{N})$可逆。对式(3.1.4)作相似变换,有

$$\begin{bmatrix} I & Q \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{X} & \widetilde{Y} \\ -\widetilde{N} & \widetilde{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & -Y \\ N & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -Q \\ 0 & I \end{bmatrix}=I$$

即

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X}-Q\widetilde{N} & \widetilde{Y}+Q\widetilde{M} \\ -\widetilde{N} & \widetilde{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & -(Y+MQ) \\ N & X-NQ \end{bmatrix}=I$$

上式左右两端分块矩阵的(1,2)分块相等,得到

$$(\widetilde{X}-Q\widetilde{N})(Y+MQ)=(\widetilde{Y}+Q\widetilde{M})(X-NQ)$$

等式(3.1.15)成立。

(2) 证明式(3.1.14)成立。

充分性。设 $Q\in RH_\infty$,取

$$N_C(s)=Y+MQ,M_C(s)=X-NQ$$

代人式(3.1.12),并注意由式(3.1.4),有 $\widetilde{M}N=\widetilde{N}M$,显然

$$\widetilde{M}(s)M_C(s)+\widetilde{N}(s)N_C(s)=I$$

故,由引理 3.1.1,闭环系统内稳定。

必要性。设 $C(s)=N_C(s)M_C^{-1}(s)$为使闭环系统内稳定的控制器,往证存在 $Q\in RH_\infty$,使得

$$C(s)=N_C M_C^{-1}=(Y+MQ)(X-NQ)^{-1}$$

因 $C(s)$使闭环系统内稳定，由定理3.1.3，$\Delta=\widetilde{M}M_C+\widetilde{N}N_C$ 为幺模阵，故有

$$\widetilde{M}M_C\Delta^{-1}+\widetilde{N}N_C\Delta^{-1}=I$$

令 $M_C\Delta^{-1}=X-NQ$，代入上式，得

$$\widetilde{M}(X-NQ)+\widetilde{N}N_C\Delta^{-1}=I \tag{3.1.16}$$

另一方面，由式(3.1.4)，有

$$\widetilde{M}(X-NQ)+\widetilde{N}(Y+MQ)=I \tag{3.1.17}$$

由(3.1.16)和(3.1.17)两式，有

$$N_C\Delta^{-1}=Y+MQ \tag{3.1.18}$$

所以

$$C=N_C\Delta^{-1}(M_C\Delta^{-1})^{-1}=(Y+MQ)(X-NQ)^{-1}$$

最后，根据 $M_C\Delta^{-1}$的定义，得

$$\widetilde{Y}M_C\Delta^{-1}-\widetilde{Y}X=-\widetilde{Y}NQ$$

利用式(3.1.18)，得

$$\widetilde{X}N_C\Delta^{-1}-\widetilde{X}Y=\widetilde{X}MQ$$

上两式相减，并利用式(3.1.4)，有

$$Q=(\widetilde{X}N_C-\widetilde{Y}M_C)\Delta^{-1}-\widetilde{X}Y+\widetilde{Y}X\in RH_\infty$$

证毕

注1 对每一个 $Q\in RH_\infty$，通常都能满足 $\det(X-NQ)\neq 0$ 和 $\det(\widetilde{X}-Q\widetilde{N})\neq 0$ 的条件(可逆条件)。因此，一般只要求 $Q\in RH_\infty$。

注2 从定理3.1.4的证明过程(2)，我们看到，对 $P(s)$做稳定双互质分解后，图3.1.2所示系统内稳定的充分必要条件为控制器 $C(s)$可表示为式(3.1.14)或式(3.1.15)，只要参数 $Q(s)\in RH_\infty$。所以，称式(3.1.14)、(3.1.15)为使闭环系统内稳定的控制器 $C(s)$的参数化公式(Youla参数化公式)。

如果被控对象 $P(s)$本身是稳定的，由定理3.1.4可得如下推论。

【推论3.1.2】 设 $P(s)$是稳定的，则所有使闭环系统内稳定的控制器 $C(s)$可以表示为

$$C(s)=(I-QP)^{-1}Q=Q(I-PQ)^{-1} \tag{3.1.19}$$

其中自由参数矩阵 $Q(s)\in RH_\infty$，且使$(I-QP)$和$(I-PQ)$可逆。

【例3.1.3】 考虑图3.1.2所示系统。设被控对象的传函 $P(s)=\frac{1}{s-a}$，$a>0$。试求使闭环系统内稳定的所有控制器的集合。

【解】 P 的状态空间实现为 $A=a$，$B=1$，$C=1$，$D=0$。

选择 F 和 H，使 $A_F=A+BF$ 和 $A_H=A+HC$ 为稳定的，可得

$$F=-a-f, f>0$$
$$H=-a-h, h>0$$

于是

$$A_F=-f, A_H=-f, C_F=1, B_H=1$$

由式(3.1.2)可算得

$$M(s)=\frac{s-a}{s+f},N(s)=\frac{1}{s+f}$$

$$\widetilde{M}(s)=\frac{s-a}{s+h},\widetilde{N}(s)=\frac{1}{s+h}$$

$$X(s)=\frac{s+a+f+h}{s+f},Y(s)=\frac{(a+f)(a+h)}{s+f}$$

$$\widetilde{X}(s)=\frac{s+a+f+h}{s+h},\widetilde{Y}(s)=\frac{(a+f)(a+h)}{s+h}$$

根据定理3.1.4,使得图3.1.2所示闭环系统内稳定控制器的集合为

$$C(s)=(Y+MQ)(X-NQ)^{-1}=(\widetilde{X}-Q\widetilde{N})^{-1}(\widetilde{Y}+Q\widetilde{M})=\frac{(s-a)Q(s)+\alpha}{s+\beta-Q(s)}$$

其中 $Q(s)\in RH_\infty$, $\alpha=(a+f)(a+h)$, $\beta=a+f+h$。

由于式(3.1.19)的控制器包含了对象 P 的模型,所以,控制器参数化在过程控制中应用时称作内模控制(Internal Model Control,简记为IMC)[28],[25]。

Youla参数化公式在早期频域 H_∞ 控制理论中起着核心作用[17]。正是因为使闭环系统内稳定的控制器中含有一个自由参数,使得我们可以通过适当选择参数 $Q(s)\in RH_\infty$ 来满足 H_∞ 标准控制问题性能指标。也就是说,Youla参数化公式为设计问题提供了一个自由度。当然,除 H_∞ 性能设计问题之外,参数化公式也可用来进行闭环系统其它方面的性能设计。如 H_2 性能设计[16]、鲁棒性能设计[16]、渐近性能设计[16],[26]以及极点配置[27]等。我们将在下一节讨论一些具体的性能设计问题。

最后,我们再对控制器(3.1.14)、(3.1.15)的结构特点作些讨论,给出参数化控制器的另一种形式。由式(3.1.14),有

$$\begin{aligned}C&=(Y+MQ)(X-NQ)^{-1}=Y(X-NQ)^{-1}+MQ(X-NQ)^{-1}=YX^{-1}(X-NQ+\\&NQ)(X-NQ)^{-1}+MQ(X-NQ)^{-1}=YX^{-1}[I+NQ(X-NQ)^{-1}]+MQ(X-\\&NQ)^{-1}=YX^{-1}+YX^{-1}NQ(X-NQ)^{-1}+MQ(X-NQ)^{-1}=YX^{-1}+(\widetilde{X}^{-1}\widetilde{Y}N+\\&M)Q(I-X^{-1}NQ)^{-1}X^{-1}=YX^{-1}+\widetilde{X}^{-1}(\widetilde{X}M+\widetilde{Y}N)Q(I-X^{-1}NQ)^{-1}X^{-1}=\\&YX^{-1}+\widetilde{X}^{-1}Q(I-X^{-1}NQ)^{-1}X^{-1}=K_0+K_1Q(I-K_3Q)^{-1}K_2\end{aligned}\qquad(3.1.20)$$

其中 $K_0=YX^{-1}$, $K_1=\widetilde{X}^{-1}$, $K_2=X^{-1}$, $K_3=X^{-1}N$。

对式(3.1.20)结构形式的控制器,我们称 C 是 Q 的线性分式变换(Linear Fractional Transformation,简记为LFT)。

若定义

$$K=\begin{bmatrix}K_0 & K_1\\ K_2 & K_3\end{bmatrix}$$

则控制器的输入输出关系为

$$u=\mathrm{LFT}(K,Q)y=[K_0+K_1Q(I-K_3Q)^{-1}K_2]y\qquad(3.1.21)$$

其中 y 为控制器的输入信号,u 为输出信号。方程(3.1.21)可以看成如下系统的输入输出关系

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix}$$

$$r = Qv, Q \in RH_\infty$$

相应的控制器结构图如图 3.1.3 所示。这种结构的参数化控制器,我们在后面的章节中还会遇到。

若令式(3.1.20)中的 $Q=0$,则得使闭环系统内稳定的特殊控制器

$$C = K_0 = YX^{-1}$$

称为中心控制器。

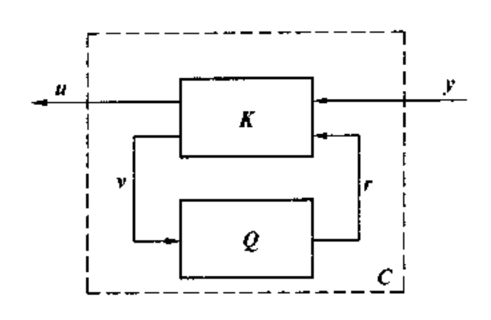


图 3.1.3 参数化控制器

3.2 参数化控制器的应用

Youla 的内稳定控制器参数化公式(3.1.14)、(3.1.15)中,含有一个自由参数矩阵 $Q(s)$,只要 $Q(s) \in RH_\infty$,就可以保证闭环系统是内稳定的。这就为系统的各种性能设计提供了一个自由度。按照系统性能设计的要求选择 $Q(s) \in RH_\infty$,就可在保证闭环系统内稳定的前提下,满足所提出的性能要求。

3.2.1 H_∞ 性能设计

考虑图 3.1.2 所示 SISO 单位反馈系统。从参考输入 r 到跟踪误差 e(图中为 x_1)的传函为

$$S = \frac{1}{1+PC}$$

称为灵敏度函数。对于某种参考输入信号 r,如果希望跟踪误差 e 的幅值小于 ε,则根据 ∞-范数的定义可用如下性能指标表示

$$\| S \|_\infty < \varepsilon$$

上式可变换为

$$\| WS \|_\infty < 1 \tag{3.2.1}$$

其中 $W = \frac{1}{\varepsilon}$,称为权函数。为使设计具有灵活性,一般常取权函数 W 依赖于频率,记为 $W(s)$,且假定 $W(s)$ 是稳定和严格正则的,即 $W(s) \in RH_2$。

【问题 3.2.1】 给定 P 和 W,设计一个正则的控制器 C,使闭环系统内稳定,同时使性能指标(3.2.1)成立。

为保证所设计的控制器是正则的,常采用如下方法。

考察传函

$$J(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^K} \tag{3.2.2}$$

其中 K 是一正整数,τ 是一正实数。该函数具有如下特性:其对极幅频曲线从 0 dB 开始下降,在转折频率 $\omega = 1/\tau$ 之前相对较平,然后以斜率 $-20K$dB/dec 下降到 $-\infty$。因此,当 τ 较小,从低频开始,在相当一段频率范围内,$J(j\omega) \approx 1$。可见,如果设计出的控制器 C 是非正则的,则可将其乘以 J,实现高频衰减,使得 CJ 为正则。

【引理 3.2.1】 如果 G 是稳定和严格正则的,即 $G \in RH_2$,那么,$\lim_{\tau \to 0} \| G(1-J) \|_\infty = 0$。

该引理的证明可参见文献[16]。下面利用引理 3.2.1 求解问题 3.2.1。做 P 的互质分解:寻找 RH_∞ 中 4 个函数满足方程

$$P = NM^{-1}, XM + YN = 1$$

将 P 和 $C = (Y + MQ)/(X - NQ)$ 代入性能指标(3.2.1)中,得

$$\| WMX(1 - X^{-1}NQ) \|_\infty < 1 \tag{3.2.3}$$

令 $J = X^{-1}NQ$,则上式成为

$$\| WMX(1 - J) \|_\infty < 1 \tag{3.2.4}$$

根据引理 3.2.1,总可选择适当小的正数 τ,使得式(3.2.4)成立。最后,由 J 的表达式解出 $Q = N^{-1}XJ$,将其代入 C 中,即可求得问题 3.2.1 的解。J 中另一参数 K 可取为等于 P 的相对阶次,从而保证 Q(进而 C)为正则的。J 中 τ、K 的具体选取可参见下面的例题。以上讨论中,我们假定了 P^{-1}是稳定的,这保证了 $Q \in RH_\infty$。

顺便指出,如果在式(3.2.3)中令 $T_1 = WMX, T_2 = WMN$,则有

$$\| T_1 - T_2 Q \|_\infty < 1$$

一般,称选择 $Q \in RH_\infty$,使得下式成立

$$\min_{Q \in RH_\infty} \| T_1 - T_2 Q \|_\infty$$

的优化问题为模型匹配问题。也就是说,H_∞最优性能设计问题可以转化为模型匹配问题。当 T_1、T_2 均为矩阵时,模型匹配问题的求解就是频域 H_∞ 控制理论所讨论的内容。该问题的求解要用到算子理论、矩阵分解理论等知识。有兴趣的读者可参阅文献[17],[18]。

最后,通过例题说明问题 3.2.1 的求解步骤。

【例 3.2.1】 给定不稳定对象和权函数

$$P(s) = \frac{1}{(s-2)^2}, W(s) = \frac{100}{s+1}$$

该权函数具有低通滤波的特性,可抑制高频干扰,获得较好的跟踪特性。

Step 1　在 RH_∞ 中做 P 的互质分解

$$N(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, M(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)^2}$$

$$Y(s) = 27\frac{s-1}{s+1}, X(s) = \frac{s+7}{s+1}$$

Step 2　取 $K = 2$(等于 P 的相对阶次)。

Step 3　选 τ 使得

$$\frac{100(s-2)^2(s+7)}{(s+1)^4}\left[1 - \frac{1}{(\tau s+1)^2}\right]$$

的 ∞ - 范数 < 1。逐渐减小 τ 求得的范数如下

τ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
∞ - 范数	199.7	19.97	1.997	0.1997

因此取 $\tau = 10^{-4}$。

Step 4

$$Q(s)=\frac{(s+1)(s+7)}{(10^{-4}s+1)^2}\in RH_\infty$$

Step 5　将 $Q(s)$代入 $C=(Y+MQ)/(X-NQ)$中,得

$$C(s)=10^4\frac{(s+1)^3}{s(s+7)(10^{-4}s+2)}$$

3.2.2　H_2 性能设计

仍然考虑图3.1.2所示SISO单位反馈系统。从干扰信号 d 到输出信号 y 的闭环传函为 PS。

【问题3.2.2】　给定对象 P 和权 W,设计一个正则的控制器 C,使闭环系统内稳定,且使性能指标

$$\min_C \| WPS \|_2 \tag{3.2.5}$$

成立。

根据2-范数的定义,若 $d(t)$是一单位脉冲,$y(t)$的2-范数就等于 $\| PS \|_2$。因此,问题3.2.2为一种干扰抑制问题。为求解问题3.2.2,我们需要如下一些概念。

【定义3.2.1】(全通传函)　RH_∞中的传函如果在虚轴上的所有点的幅值都等于1,则称它是全通的。

可以证明,全通传函满足关于虚轴的零极点对称关系,并且这样的传函是稳定的。因此,全通传函是形如

$$\frac{s-s_0}{s+\bar{s}_0},\mathrm{Re}\ s_0>0$$

的因子乘积形式。

【定义3.2.2】(最小相位传函)　RH_∞中的传函如果没有零点在 Re $s>0$,则称它是最小相位的。

由定义,最小相位传函是稳定的,且它的逆亦是稳定的。

【引理3.2.2】　对于 RH_∞中的每一个传函 G,总存在一个全通传函 G_{ap}和一个最小相位传函 G_{mp},使得 $G=G_{ap}G_{mp}$。这两个因式除符号外是惟一确定的。

该引理的证明可参见文献[16]。

正如1.2节所指出的那样,RL_2 中的每一个函数 g 都能惟一地表示成

$$g=g_{st}+g_{un},g_{st}\in RH_2,g_{un}\in RH_2^\perp$$

详见例1.2.1。在这样的设置下,如下 Pythagoras 定理成立。

【引理3.2.3】　如果 $g_{st}\in RH_2,g_{un}\in RH_2^\perp$,那么

$$\| g_{st}+g_{un} \|_2^2=\| g_{st} \|_2^2+\| g_{un} \|_2^2$$

【证明】

$$\| g_{st}+g_{un} \|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int|g_{st}(\mathrm{j}\omega)+g_{un}(\mathrm{j}\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\| g_{st} \|_2^2+\| g_{un} \|_2^2+2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int\overline{g_{st}(\mathrm{j}\omega)}g_{un}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\right]$$

只须证明最后一项积分等于0。为此,将它变成回路积分.此回路为包括虚轴在内,且包围左半平面的无穷大半径的半圆,于是有

$$\frac{1}{2\pi}\int\overline{g_{st}(\mathrm{j}\omega)}g_{un}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint g_{st}(-s)g_{un}(s)\mathrm{d}s$$

由引理中已知条件可知,被积函数 $g_{st}(-s)g_{un}(s)$ 在左半平面解析,由 Cauchy 定理,上式左端等于 0。 **证毕**

下面求解问题 3.2.2。将 P 的互质分解和 C 的参数化公式代入性能指标(3.2.5)中,得

$$\min_{Q} \| WNX - WN^2 Q \|_2$$

可见,这是一种 2-范数模型匹配问题。

假定 $W \in RH_\infty$,根据引理 3.2.2,分解 $U = WN^2$ 为 $U = U_{ap}U_{mp}$。其中 U_{ap} 在虚轴上具有单位幅值,U_{mp} 具有稳定的逆(以便回代去解 Q)。再假定 W 和 P 无零点在虚轴上。对 RH_∞ 中的一固定的 Q,有

$$\begin{aligned}\| WNX - WN^2 Q \|_2 = \| WNX - U_{ap}U_{mp}Q \|_2^2 = \| U_{ap}(U_{ap}^{-1}WNX - U_{mp}Q) \|_2^2 = \\ \| U_{ap}^{-1}WNX - U_{mp}Q \|_2^2 = \| (U_{ap}^{-1}WNX)_{un} + (U_{ap}^{-1}WNX)_{st} - U_{mp}Q \|_2^2 = \\ \| (U_{ap}^{-1}WNX)_{un} \|_2^2 + \| (U_{ap}^{-1}WNX)_{st} - U_{mp}Q \|_2^2\end{aligned}$$

其中,最后一个等式利用了引理 3.2.3。于是,惟一最优但一般非正则的 Q 为

$$Q = U_{mp}^{-1}(U_{ap}^{-1}WNX)_{st} = (WN^2)_{mp}^{-1}[(WN^2)_{ap}^{-1}WNX]_{st}$$

Q 必须在高频衰减以得到一正则的次优的 Q,正如上小节所做的那样。

【例 3.2.2】 设

$$P(s) = \frac{1-s}{s^2+s+2},\ W(s) = \frac{1}{s}$$

要求在单位阶跃扰动下对象输出 y 的 2-范数最小。

由于 $P(s)$ 是稳定的,参数化控制器应取为

$$C = Q/(1-PQ),\ Q \in RH_\infty \tag{3.2.6}$$

$W(s)$ 有一原点处的极点,需对以上导出的结果作些修改。将式(3.2.6)代入性能指标式(3.2.5),有

$$WPS = WP(1-PQ) \tag{3.2.7}$$

为了使它具有有限的 2-范数,必须确保 $(1-PQ)$ 有一零点在 $s=0$,以消去 W 的极点。即 $Q(0) = \frac{1}{P(0)} = 2$。满足 $Q(0)=2$ 的所有稳定的 Q 的集合是

$$Q(s) = 2 + sQ_1(s),\ Q_1 \text{ 稳定}$$

代入式(3.2.7),得

$$WPS = T - UQ$$

这里

$$T(s) = W(s)P(s)[1-2P(s)] = \frac{(1-s)(s+3)}{(s^2+s+2)^2}$$

$$U(s) = P^2(s) = \frac{(1-s)^2}{(s^2+s+2)^2}$$

于是,最优的 Q_1 为

$$Q_1(s) = U_{mp}^{-1}(U_{ap}^{-1}T)_{st} = \frac{(s^2+s+2)^2}{(s+1)^2}\left[\frac{(s+1)^2(1-s)(s+3)}{(1-s)^2(s^2+s+2)^2}\right]_{st} = \frac{s^3+2s^2+2s-1}{(s+1)^2}$$

显然,最优的 Q_1 是非正则的。为了得到一正则的 Q,Q_1 应当是严格正则的,所以设

$$Q_1(s) = \frac{s^3+2s^2+2s-1}{(\tau s+1)^2(s+1)^2}$$

于是

$$Q(s)=2+s\frac{s^3+2s^2+2s-1}{(\tau s+1)^2(s+1)^2}$$

当 $\tau\to 0$,这一 Q 可获得 $\|WPS\|_2$ 的最优性。将 $Q(s)$代入式(3.2.6),可求得最优控制器。

3.2.3 渐近性能设计

考虑图 3.1.2 所示 MIMO 单位反馈系统。设对象传递矩阵 $\boldsymbol{P}(s)\in H^{m\times n}$,控制器 $\boldsymbol{C}(s)\in H^{n\times m}$,$H^{m\times n}$表示 $m\times n$ 维正则实有理矩阵。参考输入信号 $\boldsymbol{R}(s)=\boldsymbol{d}s^{-1}$,其中 $\boldsymbol{d}$ 是任意 $m\times 1$ 维常值向量,即 $\boldsymbol{r}(t)$是各分量幅值不同的阶跃函数。

令从 $\boldsymbol{r}$ 到 $\boldsymbol{e}$ 的误差传递矩阵为 $\boldsymbol{G}_{er}(s)$。若反馈系统内稳定,应用拉氏变换终值定理,有

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{e}(t)=\lim_{t\to\infty}[\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{y}(t)]=\lim_{s\to 0}s\boldsymbol{G}_{er}(s)\boldsymbol{R}(s)=\lim_{s\to 0}s\boldsymbol{G}_{er}(s)\boldsymbol{d}s^{-1}=\boldsymbol{G}_{er}(0)\boldsymbol{d} \tag{3.2.8}$$

【定义 3.2.3】(渐近跟踪) 若式(3.2.8)中的 $\boldsymbol{G}_{er}(0)=\boldsymbol{0}$,则称反馈系统实现了对 $\boldsymbol{R}(s)$的渐近跟踪。

由图 3.1.2,利用定理 3.1.4,我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_{er}(s)=&[\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{C}(s)]^{-1}=[\boldsymbol{I}_m+\widetilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q})^{-1}]^{-1}=\\&[\widetilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q})^{-1}+\widetilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q})^{-1}]^{-1}=\\&(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q})[\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{X}+\widetilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{Y}+(\widetilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{M}-\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{N})]^{-1}\widetilde{\boldsymbol{M}}=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q})\widetilde{\boldsymbol{M}}\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

由定义式 3.2.3 和式(3.2.9),为实现渐近跟踪,我们得到关于参数 $\boldsymbol{Q}$ 的插值约束矩阵方程

$$\boldsymbol{N}(0)\boldsymbol{Q}(0)=\boldsymbol{X}(0) \tag{3.2.10}$$

其中 $\boldsymbol{N}(0)$为 $m\times n$ 维常值矩阵,$\boldsymbol{X}(0)$为 $m\times m$ 维常值矩阵,$\boldsymbol{Q}(0)$为 $n\times m$ 维未知常值矩阵。若记

$$\boldsymbol{X}_i(0)=[\boldsymbol{X}_{1i}(0),\boldsymbol{X}_{2i}(0),\cdots,\boldsymbol{X}_{mi}(0)]^{\mathrm{T}}\qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$\boldsymbol{Q}_i(0)=[\boldsymbol{Q}_{1i}(0),\boldsymbol{Q}_{2i}(0),\cdots,\boldsymbol{Q}_{mi}(0)]^{\mathrm{T}}\qquad i=1,2,\cdots,m$$

则式(3.2.10)的矩阵方程等价于 m 个线性代数方程组

$$\boldsymbol{N}(0)\boldsymbol{Q}_i(0)=\boldsymbol{X}_i(0)\qquad i=1,2,\cdots,m \tag{3.2.11}$$

【引理 3.2.4】 如果对所有 $i=1,2,\cdots,m$,有

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{N}(0)]=\mathrm{rank}[\boldsymbol{N}(0)\quad \boldsymbol{X}_i(0)]$$

则存在满足式(3.2.10)插值约束的 $\boldsymbol{Q}(s)\in RH_\infty$。

【证明】 令 $\boldsymbol{Q}(s)=\boldsymbol{X}(s+1)^{-1}$,其中 $\boldsymbol{X}$ 为 $n\times m$ 维待定常值矩阵,这保证了 $\boldsymbol{Q}(s)\in RH_\infty$,且有 $\boldsymbol{Q}(0)=\boldsymbol{X}$。于是 $\boldsymbol{Q}(s)=\boldsymbol{Q}(0)(s+1)^{-1}$,如果引理中的秩条件成立,则 m 个线性代数方程组(3.2.11)有解,即矩阵方程(3.2.10)有解 $\boldsymbol{Q}(0)$。故参数矩阵 $\boldsymbol{Q}(s)=\boldsymbol{X}(s+1)^{-1}=\boldsymbol{Q}(0)(s+1)^{-1}$满足式(3.2.10)的插值约束,且 $\boldsymbol{Q}(s)\in RH_\infty$。 **证毕**

【定理 3.2.1】 对于图 3.1.2 所示反馈系统,如果由引理 3.2.4 可以解得参数矩阵 $\boldsymbol{Q}(s)\in RH_\infty$,则利用定理 3.1.4 给出的控制器参数化公式

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q})^{-1} \tag{3.2.12}$$

可使得反馈系统内稳定且实现渐近跟踪。

【证明】 内稳定性是显然的。

若参数矩阵 $Q(s)$按引理3.2.4给出的方法进行选择，则由式(3.2.8)和式(3.2.9)，有

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = G_{er}(0)d = [X(0) + N(0)Q(0)]\widetilde{M}(0)d = 0$$

即反馈系统实现了渐近跟踪。 **证毕**

注 由式(3.2.12)可知，关于参数 $Q(s)$的插值约束矩阵方程(3.2.10)，实际上是将向量值阶跃输入 $R(s) = ds^{-1}$的不稳定极点($s=0$)引入控制器中，即熟知的内模原理。

【例3.2.3】 上接例3.1.1。令 $s=0$，得

$$X(0) = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, N(0) = \begin{bmatrix} -11 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵方程(3.2.10)，因 $\det N(0) = -4 \neq 0$，有解

$$Q(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{9}{4} & 5 \end{bmatrix}$$

所以

$$Q(s) = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{9}{4} & 5 \end{bmatrix} \in RH_\infty$$

最后，求得控制器

$$C = (Y + MQ)(X - NQ)^{-1} = \frac{1}{2sC_d}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$C_d = 2s^6 + 20s^5 + 79s^4 + 171s^3 + 209s^2 + 133s + 34$$

$$C_{11} = 7s^6 + 81s^5 + 347s^4 + 802s^3 + 1\,096s^2 + 880s + 290$$

$$C_{12} = 8s^6 + 107s^5 + 534s^4 + 1\,424s^3 + 3\,242s^2 + 969s + 656$$

$$C_{21} = s^6 - 17s^5 - 207s^4 - 571s^3 - 664s^2 - 180s - 472$$

$$C_{22} = 12s^6 + 41s^5 - 24s^4 - 404s^3 - 1\,062s^2 - 1\,237s - 478$$

我们看到，C 的每一元素均含有项$\frac{1}{s}$，即实现了对阶跃参数信号(输入)的内模配置。故所设计的控制器可完成对向量值价跃参考信号的的渐近跟踪。

3.2.4 极点配置

仍然考虑图3.1.2所示 MIMO 单位反馈系统。从参考信号 r 到输出信号 y 的闭环传递矩阵为

$$G_{yr}(s) = P(I + CP)^{-1}C = NM^{-1}[I + (\widetilde{X} - Q\widetilde{N})^{-1}(\widetilde{Y} + Q\widetilde{M})NM^{-1}]^{-1}(\widetilde{X} - Q\widetilde{N})^{-1}(\widetilde{Y} + Q\widetilde{M}) = N[(\widetilde{X} - Q\widetilde{N})M + (\widetilde{Y} + Q\widetilde{M})]^{-1}(\widetilde{Y} + Q\widetilde{M}) = N(\widetilde{Y} + Q\widetilde{M})$$

设参数矩阵 $Q(s)$的状态空间实现为 $Q = [A_Q, B_Q, C_Q, D_Q]$，由式(3.1.2)和线性系统运算规则(见附录)，有

$$Q\widetilde{M}=[A_Q,B_Q,C_Q,D_Q][A_H,H,C,I]=\left[\begin{bmatrix}A_H & 0\\ B_QC & A_Q\end{bmatrix},\begin{bmatrix}H\\ B_Q\end{bmatrix},[D_QC \quad C_Q],D_Q\right]$$

$$\widetilde{Y}+Q\widetilde{M}=[A_H,H,F,0]+\left[\begin{bmatrix}A_H & 0\\ B_QC & A_Q\end{bmatrix},\begin{bmatrix}H\\ B_Q\end{bmatrix},[D_QC \quad C_Q],D_Q\right]=$$

$$\left[\begin{bmatrix}A_H & 0\\ B_QC & A_Q\end{bmatrix},\begin{bmatrix}H\\ B_Q\end{bmatrix},[F+D_QC \quad C_Q],D_Q\right]$$

$$N(\widetilde{Y}+Q\widetilde{M})=[A_F,B,C_F,D]\left[\begin{bmatrix}A_H & 0\\ B_QC & A_Q\end{bmatrix},\begin{bmatrix}H\\ B_Q\end{bmatrix},[F+D_QC \quad C_Q],D_Q\right]=$$

$$\left[\begin{bmatrix}A_H & 0 & 0\\ B_QC & A_Q & 0\\ B(F+D_QC) & BC_Q & A_F\end{bmatrix},\begin{bmatrix}H\\ B_Q\\ BD_Q\end{bmatrix},[D(F+D_QC)DC_Q \quad C_F],DD_Q\right]=$$

$$[\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D}] \tag{3.2.13}$$

于是 G_{yr}的状态空间实现的 A 矩阵为

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}A_H & 0 & 0\\ B_QC & A_Q & 0\\ B(F+D_QC) & BC_Q & A_F\end{bmatrix} \tag{3.2.14}$$

【定理 3.2.2】 设 P 的状态空间实现$[A,B,C,D]$能稳定、能检测，参数化控制器如式(3.1.5)。若闭环传递矩阵(3.2.13)为一最小实现，则图 3.1.2 所示的 MIMO 单位反馈系统是内稳定的且稳定，极点可以任意配置。

【证明】 内稳定性是参数化控制器的直接结果。

下面证明闭环稳定极点可以任意配置。事实上，由式(3.2.14)给出的矩阵 $\hat{A}$ 的结构，我们有

$$\Delta[\hat{A}]=\Delta[A_H]\Delta[A_Q]\Delta[A_F] \tag{3.2.15}$$

其中 $\Delta[A]$表示 A 的特征多项式。由定理中条件(A,B)能稳定，(C,A)能检测，可选择 F、H，使 A_F、A_H 特征值具有任意负实部，再选择参数矩阵 $Q\in RH_\infty$，使 A_Q 的特征值具有任意负实部。又 $G_{yr}(s)$的状态空间实现(3.2.13)为一最小实现，故有

$$\dim\hat{A}=\deg G_{yr}(s)$$

其中 dim 和 deg 分别代表维数和次数，因此，闭环传递矩阵 $G_{yr}(s)$的稳定极点可以任意配置。

证毕

注　若 $G_{yr}(s)$的状态空间实现(3.2.13)为非最小实现(不能控和或不能观)，则有

$$\deg G_{yr}(s)<\dim\hat{A}$$

即存在传递函数(矩阵)的零极点对消。

【例 3.2.4】 设

$$P=\frac{s-1}{s(s-2)}$$

P 的一个最小实现为 $P(s)=[A,B,C,D]$，其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},C=[-1 \quad 1],D=0$$

选择 F、H，使 A_F、A_H 的特征值分别为[-1, -2]和[-1, -3](可根据要求配置)，则可得

$$F=[-2,-3],H=\begin{bmatrix}-9\\-15\end{bmatrix},A_F=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix},A_H=\begin{bmatrix}9&-8\\15&-13\end{bmatrix}$$

依公式(3.1.2)，可得

$$\widetilde{M}=[A_H,H,C,I]=\frac{s^2-2s}{s^2+4s+3},\widetilde{N}=[A_H,B_H,C,D]=\frac{s-1}{s^2+4s+3}$$

$$\widetilde{Y}=[A_H,H,F,0]=\frac{93s-6}{s^2+4s+3},\widetilde{X}=[A_H,-B_H,F,I]=\frac{s^2+9s-58}{s^2+4s+3}$$

$$N=[A_F,B,C_F,D]=\frac{s-1}{s^2+3s+2}$$

选择

$$Q(s)=\frac{1}{s-1-j}+\frac{1}{s-1+j}=\frac{2s+2}{s^2+2s+2}$$

则 $Q(s)\in RH_\infty$，其极点为$\{-1+j,-1-j\}$(可根据要求配置)，于是

$$G_{yr}(s)=N(\widetilde{Y}+Q\widetilde{M})=\frac{95s^4+83s^3-8s^2-182s+12}{(s^2+3s+2)(s^2+2s+2)(s^2+4s+3)}$$

$G_{yr}(s)$的分子、分母互质，故式(3.2.13)得出的状态空间实现必为最小实现。最后，按式(3.1.15)求得控制器为

$$C(s)=\frac{95s^3+178s^2+170s-12}{s^4+11s^3-36s^2-98s-118}$$

3.3 镇定与同时镇定

镇定问题是控制系统设计(综合)的一个最基本的问题。工程实际中，所设计的控制器首先要使闭环系统是内稳定的(镇定)，然后再来考虑使其满足一定的系统性能。同时镇定问题在控制系统可靠性设计方面具有重要的应用价值。在元器件失效的情况下，所设计的控制器仍能使闭环系统保持内稳定，无疑在某些危险控制场合是必须的。

3.3.1 镇定

考虑图 3.1.2 所示单位反馈系统。

【定义 3.3.1】(镇定) 给定被控对象 P，设计一控制器 C，使闭环系统达到内稳定的过程，称为镇定。相应的控制器 C 称为镇定控制器。

3.1 节介绍的 Youla 的内稳定控制器参数化公式，就是一种镇定控制器。因为只要参数 $Q\in RH_\infty$，闭环系统就是内稳定的。当然，该参数化公式除了能使闭环达内稳定之外，我们还可以通过选择自由参数 $Q\in RH_\infty$来进行系统的各种性能设计，正如 3.2 所做的那样。

【定义 3.3.2】(强镇定) 如果镇定控制器本身是稳定的，则相应的镇定过程称为强镇定。

研究强镇定是出于如下考虑：一方面，如果对象本身是稳定的，由于某种故障，使得反馈环开路，此时如果控制器也是稳定的，那么系统整体的稳定性就能维持；另一方面，知道系统是否可强镇定，有利于解决下面将要讨论的同时镇定问题。

先看一个不可强镇定的例子。

【例 3.3.1】 设

$$P(s)=\frac{s-1}{s(s-2)}$$

我们将证明达到内稳定的每一个控制器 C 都是不稳定的。做 P 的互质分解

$$N(s)=\frac{s-1}{(s+1)^2},M(s)=\frac{s(s-2)}{(s+1)^2},Y(s)=\frac{14s-1}{s+1},X(s)=\frac{s-9}{s+1}$$

由定理 3.1.4,所有镇定控制器可表示为

$$C=(Y+MQ)/(X-NQ),Q\in RH_\infty$$

因为

$$N(Y+MQ)+M(X-NQ)=1$$

所以$(Y+MQ)$和$(X-NQ)$也是互质的,没有共同的零点在 Re $s\geqslant0$。因此,为证明所有这样的 C 都是不稳定的,只须证明对每一个 $Q\in RH_\infty$,$(X-NQ)$总有一零点在 Re $s\geqslant0$。现知

$$N(1)=0,N(\infty)=0$$

因此,对每一个 $Q\in RH_\infty$,有

$$(X-NQ)(1)=X(1)=-4,(X-NQ)(\infty)=X(\infty)=1$$

右边的两个值有相反的符号。于是当 s 沿正实轴移动时,函数$(X-NQ)$要改变符号。由连续性可知,它必在某一点上等于 0。即$(X-NQ)$在正实轴上有实零点。

下面的定理指出,为了使 P 为可强镇定的,P 的零点和极点分布必须满足一定的条件,称之为均衡交错性(Parity Interlacing Property,简记为 PIP)条件[16],[22]。

【定理 3.3.1】 P 是可强镇定的,当且仅当在每一对 Re $s\geqslant0$ 的实零点(包括∞点)中间有偶数个实极点。

上例中,零点为 $s=1,\infty$,中间有一个极点 $s=2$。因此,这个对象 P 不可强镇定。

【例 3.3.2】 设

$$P(s)=\frac{(s-1)^2(s^2-s+1)}{(s-2)^2(s+1)^3}$$

正实轴上的零点为 $s=1,\infty$。重零点 $s=1$ 中间不可能包含极点。在 $s=1$ 和 $s=\infty$之间有两个实极点 $s=2$。因此 P 是可强镇定的。

【定理 3.3.1 的证明】 必要性。证明与例 3.3.1 类似。反证。假定零极点关系不成立,往证每一个镇定控制器本身都是不稳定的。设 P 的互质分解为

$$P=N/M,XM+YN=1$$

以及某个可镇定的控制器

$$C=\frac{Y+MQ}{X-NQ},Q\in RH_\infty$$

只需证明$(X-NQ)$有零点在 Re $s\geqslant0$。

由假定,N 有一对实零点在 Re $s\geqslant0$,比如说在 $s=\sigma_1,\sigma_2$,但 M 有奇数个零点在它们之间。于是 $M(\sigma_1)$和 $M(\sigma_2)$有相反的符号。又因为在 N 的右半平面零点处,$XM=1$,所以 $X(\sigma_1)$和 $X(\sigma_2)$也有相反的符号。故函数 $X-NQ$ 有实零点在 $s=\sigma_1$ 和 $s=\sigma_2$ 之间。

充分性。为证充分性,先看下面的例子。

【例 3.3.3】 设

$$P(s)=\frac{s-1}{(s-2)^2}$$

P 的两个零点 $s=1,\infty$之间有两个极点 $s=2$,故 P 是可强镇定的。为了得到一个强镇定控制

器 C,应当找到一个 $Q\in RH_\infty$,使得 $U=X-NQ$ 的逆属于 RH_∞。这等价于寻找一个幺模阵 U,在 N 的 2 个零点 $s=1,\infty$ 处,$U=X$。对于此例的 P,有

$$N(s)=\frac{s-1}{(s+1)^2},M(s)=\frac{(s-2)^2}{(s+1)^2}$$

且

$$X(1)=\frac{1}{M(1)}=4,X(\infty)=\frac{1}{M(\infty)}=1$$

因此,问题就简化成构造一个幺模阵 U,使得

$$U(1)=4,U(\infty)=1$$

此问题可以分两步来解。首先找一个幺模阵 U_1,使 $U_1(1)=4$。最简单的选择是常数,$U_1(s)=4$。其次,寻找形如

$$U=(1+aF)^lU_1$$

的 U。其中 a 是一常数,l 是一整数,$F\in RH_\infty$。为保证 $U(1)=U_1(1)$,应使 $F(1)=0$,本例取

$$F(s)=\frac{s-1}{s+1}$$

则要使 $U(\infty)=1$,必须有 $(1+a)^l\cdot 4=1$,即

$$a=(\frac{1}{4})^{\frac{1}{l}}-1 \tag{3.3.1}$$

为使 $U^{-1}\in RH_\infty$,只需使 $\|aF\|_\infty<1$(即 $|a|<\frac{1}{\|F\|_\infty}=1$)。因此,为得到合适的 l 和 a,我们首先选一个足够大的 l,使得

$$\left|\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{l}}-1\right|<1$$

然后从式(3.3.1)得到 a,例如 $l=1,a=-\frac{3}{4}$。于是有

$$U(s)=(1-\frac{3}{4}\frac{s-1}{s+1})4=\frac{s+7}{s+1}$$

最后,U、M、N 惟一地确定 C

$$U=X-NQ\quad\Rightarrow Q=\frac{X-U}{N}\quad\Rightarrow C=\frac{X+MQ}{X-NQ}=\frac{1-MU}{NU}$$

此例可得 $C(s)=27/(s+7)$。注意,实际上我们并不需要构造 X、Y。

上述例子,给出了定理 3.3.1 充分性证明的基本思路。一般的证明步骤较复杂,故做一个简化的假设,即 P 的不稳定的极点和零点(包括∞零点)都是实的和不相同的(当然,如果没有此假设,定理 3.3.1 仍成立)。

步骤:

Step 0 做 P 的互质分解 $P=N/M$,将 N 的非负实零点排列成

$$0\leqslant\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_m=\infty$$

定义 $r_i=1/M(\sigma_i),i=1,2,\cdots,m$。当且仅当 $r_1,\cdots,r_m$ 全部具有相同的符号时,P 是可强镇定的。如果此条件满足,转下步。

Step 1 设 $U_1(s)=r_1$。

继续。假定已构造出幺模阵 U_k 满足

$$U_k(\sigma_i)=r_i,i=1,2,\cdots,k$$

Step $k+1$ 选 $F\in RH_\infty$,且有零点在 $s=\sigma_1,\cdots,\sigma_k$。选择 $l\geq 1$ 和 a,使得

$$[1+aF(\sigma_{k+1})]^l U_k(\sigma_{k+1})=r_{k+1},\ |a|<1/\|F\|_\infty$$

令

$$U_{k+1}=(1+aF)^l U_k$$

继续到 Step m。

Step $m+1$ 取 $U=U_m$ 及 $C=(1-MU)/(NU)$。 **证毕**

以上仅就单变量系统证明了定理 3.3.1。对于多变量系统,相应的结果见文献[22]。

3.3.2 同时镇定

考虑图 3.1.2 所示的 MIMO 单位反馈系统,同时镇定问题就是用一个控制器来镇定多个对象。

【定义 3.3.3】(同时镇定) 给定对象 $\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_l$,如果能用同一个控制器 $\boldsymbol{C}$ 使闭环达到内稳定,则称这 $l+1$ 个对象是可同时镇定的,相应的控制器 $\boldsymbol{C}$ 称为同时镇定控制器。

同时镇定的工程背景是明显的。首先,考虑系统的可靠镇定问题。令 $\boldsymbol{P}_0$ 代表标称对象传函,$\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_l$ 为各种故障状态下的对象传函。其次,在非线性系统跟踪问题中,在不同工作点处,对其做小范围线性化,得到不同的传函。再有,飞行器在不同高度和飞行速度下,其数学模型是不同的。以上各种情况下,如何设计一个控制器使得闭环系统在不同的对象模型下均保持内稳定具有很大实际意义。

同时镇定问题于 1982 年由 Saeks 和 Murray 首先提出[29]。Vidyasagar 等在这方面进行了研究,并取得了一些成果,见文献[30]~[36]及其参考文献。

下面的定理揭示出两个对象的同时镇定问题可以转化为一个辅助对象的强镇定问题。为证明该定理,我们需要如下引理。

【引理 3.3.1】[30] 设 $\boldsymbol{P}$ 是严格正则的,其右互质分解为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}^{-1},\ \widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{M}+\widetilde{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{I}$$

则(1)$\boldsymbol{N}$ 是严格正则的。(2)$\det \boldsymbol{M}(\infty)\neq 0$, $\det \widetilde{\boldsymbol{X}}(\infty)\neq 0$(即 $\det \boldsymbol{M}$ 和 $\det \widetilde{\boldsymbol{X}}$ 具有相对阶次零)。

考虑两个严格正则的对象 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{P}_1$,它们的双互质分解由定理 3.1.1 给定。我们有如下定理。

【定理 3.3.2】 定义

$$\boldsymbol{A}_1=\widetilde{\boldsymbol{X}}_0\boldsymbol{M}_1+\widetilde{\boldsymbol{Y}}_0\boldsymbol{N}_1,\ \boldsymbol{B}_1=-\widetilde{\boldsymbol{N}}_0\boldsymbol{M}_1+\widetilde{\boldsymbol{M}}_0\boldsymbol{N}_1 \tag{3.3.2}$$

则 $\det \boldsymbol{A}_1\neq 0$,且 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{B}_1$ 是右互质的。进而,存在控制器 $\boldsymbol{C}$ 同时镇定 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{P}_1$,当且仅当存在 $\boldsymbol{R}\in RH_\infty$,镇定(强镇定)$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_1^{-1}$。

【证明】 首先,根据引理 3.3.1 可知 $\boldsymbol{A}_1(\infty)=\widetilde{\boldsymbol{X}}_0(\infty)\boldsymbol{M}_1(\infty)$(因 $\boldsymbol{N}_1(\infty)=0$),且 $\det \boldsymbol{A}_1(\infty)\neq 0$(因 $\det \boldsymbol{M}_1(\infty)\neq 0$ 和 $\det \widetilde{\boldsymbol{X}}_0(\infty)\neq 0$),因此 $\boldsymbol{A}_1^{-1}$ 有定义。其次,由于

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{B}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{X}}_0 & \widetilde{\boldsymbol{Y}}_0\\ -\widetilde{\boldsymbol{N}}_0 & \widetilde{\boldsymbol{M}}_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{N}_1\end{bmatrix} \tag{3.3.3}$$

由式(3.1.4)可验证 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{B}_1$ 是右互质的。

根据定理 3.1.4,存在控制器 C 同时镇定 P_0、P_1,当且仅当存在 $Q_0,Q_1\in RH_\infty$,使得

$$(\widetilde{X}_0-Q_0\widetilde{N}_0)^{-1}(\widetilde{Y}_0+Q_0\widetilde{M}_0)=(\widetilde{X}_1-Q_1\widetilde{N}_1)^{-1}(\widetilde{Y}_1+Q_1\widetilde{M}_1) \tag{3.3.4}$$

注意到,$\widetilde{X}_0-Q_0\widetilde{N}_0$ 与 $\widetilde{Y}_0+Q_0\widetilde{M}_0$ 是左互质的,$\widetilde{X}_1-Q_1\widetilde{N}_1$ 与 $\widetilde{Y}_1+Q_1\widetilde{M}_1$ 是左互质的。因此,式(3.3.4)成立,当且仅当存在幺模阵 U,使得

$$\widetilde{X}_0-Q_0\widetilde{N}_0=U(\widetilde{X}_1-Q_1\widetilde{N}_1) \tag{3.3.5a}$$

$$\widetilde{Y}_0+Q_0\widetilde{M}_0=U(\widetilde{Y}_1+Q_1\widetilde{M}_1) \tag{3.3.5b}$$

这样,我们已经证明 P_0、P_1 是可同时镇定的,当且仅当存在稳定的 Q_0、Q_1 和幺模阵 U,使得式(3.3.5)成立。下面证明上述条件成立,当且仅当存在 $R\in RH_\infty$,使得 A_1+RB_1 是幺模阵。

为此,将式(3.3.5)的两个方程改写为

$$[I \quad Q_0]\begin{bmatrix}\widetilde{X}_0 & \widetilde{Y}_0\\ -\widetilde{N}_0 & \widetilde{M}_0\end{bmatrix}=U[I \quad Q_1]\begin{bmatrix}\widetilde{X}_1 & \widetilde{Y}_1\\ -\widetilde{N}_1 & \widetilde{M}_1\end{bmatrix} \tag{3.3.6}$$

而由式(3.1.4),可得

$$\begin{bmatrix}\widetilde{X}_1 & \widetilde{Y}_1\\ -\widetilde{N}_1 & \widetilde{M}_1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}M_1 & -Y_1\\ N_1 & X_1\end{bmatrix} \tag{3.3.7}$$

用式(3.3.7)乘式(3.3.6)的两端,得到

$$[I \quad Q_0]\begin{bmatrix}\widetilde{X}_0 & \widetilde{Y}_0\\ -\widetilde{N}_0 & \widetilde{M}_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1 & -Y_1\\ N_1 & X_1\end{bmatrix}=U[I \quad Q_1] \tag{3.3.8}$$

$$[I \quad Q_0]\begin{bmatrix}A_1 & D_1\\ B_1 & E_1\end{bmatrix}=U[I \quad Q_1] \tag{3.3.9}$$

其中 D_1、E_1 是自明的。接下来是证明存在稳定的 Q_0、Q_1 和幺模阵 U 满足式(3.3.9),当且仅当存在稳定的 R,使得 A_1+RB_1 是幺模阵。

充分性。选择稳定的 R,使得 A_1+RB_1 是幺模阵,令 $Q_0=R$、$U=A_1+RB_1$ 和 $Q_1=U^{-1}(D_1+RE_1)$,即得式(3.3.9)。

必要性。选择 Q_0、Q_1 和 U,使得式(3.3.9)成立,令 $R=Q_0$,则 $A_1+RB_1=U$ 是幺模阵。

最后,根据推论 3.1.1,$R\in RH_\infty$,镇定 $P=B_1A_1^{-1}$,当且仅当 A_1+RB_1 是幺模阵。 **证毕**

注 1 定理3.3.2 在两对象 P_0、P_1 是严格正则的假设下,给出了 P_0、P_1 可同时镇定的充分必要条件。一般情况下(P_0、P_1 是正则的)的结果是相同的,只是某些表达式要复杂一些。详见文献[30]。

注 2 当 P_0 是稳定的,可以取 $N_0=\widetilde{N}_0=P_0$, $M_0=I$, $\widetilde{M}_0=I$, $Y_0=0$, $\widetilde{Y}_0=0$, $X_0=I$, $\widetilde{X}_0=I$。于是 $B_1A_1^{-1}=P_1-P_0$。

【例 3.3.3】 设

$$P_0(s)=\frac{1}{s+1},\ P_1(s)=\frac{as+b}{(s+1)(s-1)}$$

其中 a 和 b 是实常数且 $a\neq 1$。因为 P_0 是稳定的,我们有

$$P = B_1A_1^{-1} = P_1 - P_0 = \frac{(a-1)s+b+1}{(s+1)(s-1)}$$

其零点在

$$s = \frac{1+b}{1-a}, \infty$$

一个不稳定的极点在 $s=1$。因此，P 是可强镇定的，或说 P_0 和 P_1 是可同时镇定的，当且仅当 P 的零点 $(1+b)/(1-a)$ 是负的或位于 $s=1$ 之右，即

$$\frac{1+b}{1-a} < 0 \qquad 或 \qquad \frac{1+b}{1-a} > 1$$

定理 3.3.2 指出，如果两个对象满足定理 3.3.1 的 PIP 条件，则可将两对象的同时镇定问题转化为一个辅助对象的强镇定问题。可以看出，即使对于简单的两对象系统的同时镇定问题，其解也不一定总是存在的。一般情况下的多个对象的同时镇定问题目前仍没有较好地解决。下面的定理仅给出一个理论上的结果。

【定理 3.3.3】 给定严格正则对象 $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_l$。定义

$$\boldsymbol{A}_i = \widetilde{\boldsymbol{X}}_0\boldsymbol{M}_i + \widetilde{\boldsymbol{Y}}_0\boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{B}_i = -\widetilde{\boldsymbol{N}}_0\boldsymbol{M}_i + \widetilde{\boldsymbol{M}}_0\boldsymbol{N}_i \qquad i = 1,2,\cdots,l$$

则 $\det \boldsymbol{A}_i \neq 0, \forall i$，且 $\boldsymbol{B}_i, \boldsymbol{A}_i, \forall i$，是右互质的。进而，存在一个控制器 $\boldsymbol{C}$ 镇定 $\boldsymbol{P}_i, (i = 0,1,\cdots, l)$，当且仅当存在一个 $\boldsymbol{R} \in RH_\infty$，镇定 $\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{A}_i^{-1} (i = 1,2,\cdots,l)$。

【证明】 读者可自行验证 $\det \boldsymbol{A}_i \neq 0, \forall i$，和 $\boldsymbol{B}_i, \boldsymbol{A}_i, \forall i$，是右互质的。首先，存在一个控制器 $\boldsymbol{C}$ 镇定 $\boldsymbol{P}_i (i = 0,1,\cdots,l)$，当且仅当存在 $\boldsymbol{Q}_0, \cdots, \boldsymbol{Q}_l \in RH_\infty$，使得

$$(\widetilde{\boldsymbol{X}}_0 - \boldsymbol{Q}_0\widetilde{\boldsymbol{N}}_0)^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{Y}}_0 + \boldsymbol{Q}_0\widetilde{\boldsymbol{M}}_0) = (\widetilde{\boldsymbol{X}}_i - \boldsymbol{Q}_i\widetilde{\boldsymbol{N}}_i)^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{Y}}_i + \boldsymbol{Q}_i\widetilde{\boldsymbol{M}}_i) \quad i = 1,2,\cdots,l \tag{3.3.10}$$

其次，式(3.3.10)成立，当且仅当存在幺模阵 $\boldsymbol{U}_1, \cdots, \boldsymbol{U}_l$，使得

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{X}}_0 - \boldsymbol{Q}_0\widetilde{\boldsymbol{N}}_0 &= \boldsymbol{U}_i(\widetilde{\boldsymbol{X}}_i - \boldsymbol{Q}_i\widetilde{\boldsymbol{N}}_i) \\ \widetilde{\boldsymbol{Y}}_0 + \boldsymbol{Q}_0\widetilde{\boldsymbol{M}}_0 &= \boldsymbol{U}_i(\widetilde{\boldsymbol{Y}}_i + \boldsymbol{Q}_i\widetilde{\boldsymbol{M}}_i) \end{aligned}\right. \qquad i = 1,2,\cdots,l$$

其余部分的证明类似于定理 3.3.2。 证毕

注 定理 3.3.3 将 $(l+1)$ 个对象的同时镇定问题简化为 l 个对象的强同时镇定问题。

3.4 同时镇定控制器参数化

本节讨论同时镇定控制器求解的参数化方法[34],[35]，其结果为同时镇定控制器解的集合和参数所应满足的一系列二次方程约束条件。我们将看到，控制器参数化方法是求解同时镇定问题的一种有效的方法。

考虑图 3.1.2 所示 MIMO 单位反馈系统。内稳定控制器由 Youla 参数化公式(3.1.14)和式(3.1.15)给出。对于此种结构的控制系统的同时镇定问题，被控对象是变化的，表示为 $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_l$，相应的镇定控制器分别为 $\boldsymbol{C}_0, \boldsymbol{C}_1, \cdots, \boldsymbol{C}_l$。下面的定理给出了基于 Youla 参数化的同时镇定控制器参数化结果。

【定义 3.4.1】 $l+1$ 个对象 $\boldsymbol{P}_i (i = 0,1,\cdots,l)$ 的同时镇定控制器解的集合为

$$\boldsymbol{S}_l(\boldsymbol{C}) = \{\boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{Q}_0) = (\boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{M}_0\boldsymbol{Q}_0)(\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{N}_0\boldsymbol{Q}_0)^{-1} \mid \boldsymbol{Q}_0 \in \Lambda\} \tag{3.4.1}$$

$\Lambda = \{\boldsymbol{Q}_0 \in RH_\infty \mid \det(\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{N}_0\boldsymbol{Q}_0) \neq 0$，且

3.5 同时镇定参数化控制器的应用

我们在 3.4 节得到了同时镇定控制器的参数化公式,即定理 3.4.1。类似于 Youla 的参数化公式,利用定理 3.4.1 给出的同时镇定控制器参数化公式(3.4.1),可对同时镇定系统的各种性能进行设计。与 Youla 参数化公式不同的是,利用同时镇定参数化公式进行性能设计,需验证一个约束条件,即式(3.4.2)是否成立。

3.5.1 同时镇定 H_∞ 性能设计

考虑图 3.1.2 所示 SISO 单位反馈系统。对同时镇定问题来说,被控对象 P 是可变的,设为 $P_0,P_1,\cdots,P_l$。我们所要求解的问题是:

【问题 3.5.1】 给定 $P_0,P_1,\cdots,P_l$,设计控制器 C,使得闭环系统达到

(1) C 同时镇定 $P_0,P_1,\cdots,P_l$。

(2) 对 $P_0,P_1,\cdots,P_l,C$ 使系统均具有 H_∞ 性能。

【定义 3.5.1】(H_∞ 性能) $l+1$ 个对象 $P_0,P_1,\cdots,P_l$ 的同时镇定 ∞ - 范数性能指标为

$$\max_{0\leqslant i\leqslant l}\{\|WS_{i0}\|_\infty\}<1 \tag{3.5.1}$$

其中灵敏度函数 $S_{i0}=\dfrac{1}{1+P_iC_0(Q_0)}=\dfrac{1}{1+L_{i0}}(i=0,1,\cdots,l)$。

这里取 P_0 为主对象,$C_0(Q_0)$为式(3.4.1)给出的参数化主控制器。

以下讨论中,假定对象 $P_i(i=0,1,\cdots,l)$是最小相位的(见定义 3.2.2)。

首先,对非同时镇定问题的性能指标式(3.2.1)做如下几何解释。注意到

$$\|WS\|_\infty<1\Leftrightarrow\left|\frac{W(\mathrm{j}\omega)}{1+L(\mathrm{j}\omega)}\right|<1,\forall\omega\Leftrightarrow|W(\mathrm{j}\omega)|<|1+L(\mathrm{j}\omega)|,\forall\omega \tag{3.5.2}$$

最后一个不等式指的是在每一频率 ω 下,奈氏曲线 $L(\mathrm{j}\omega)$上的点都位于以$(-1,\mathrm{j}0)$为圆心,$|W(\mathrm{j}\omega)|$为半径的圆外,如图 3.5.1 所示。如果取权函数 $W(\mathrm{j}\omega)=W=$ 常数,则

$$\|WS\|_\infty<1\Leftrightarrow|W|<|1+L(\mathrm{j}\omega)|,\forall\omega\Leftrightarrow$$
$$|W|<\inf_\omega|1+L(\mathrm{j}\omega)| \tag{3.5.3}$$

而$\inf\limits_\omega|1+L(\mathrm{j}\omega)|=$ 从 -1 点到奈氏曲线上的最近点的距离。众所周知,如果 L 是最小相位的,且 $L(0)>0$,则奈氏曲线 $L(\mathrm{j}\omega)$起始于正实轴,且如果 L 是严格正则的,最终将按顺时针方向趋于原点。根据奈氏判据,如果 L 的幅角在穿越频率处大于 $-180°$(或者 L 不绕过点$(-1,\mathrm{j}0)$,则可保证内稳定性(此即所谓的小增益定理)。也就是说,如果某对象 P 对应的开环传函 L 是最小相位的,应用 Youla 的内稳定参数化控制器做 H_∞ 性能设计,等价于选择正则的 C,使奈氏曲线 $L(\mathrm{j}\omega)$不绕过点$(-1,\mathrm{j}0)$,且使式(3.5.3)的最后一个不等式成立。

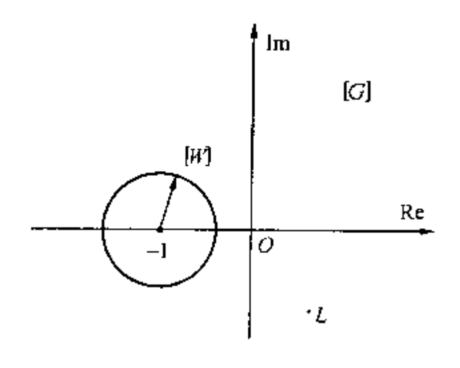


图 3.5.1 图示性能指标

同样可对同时镇定性能指标(3.5.1)做出几何解释。我们有

$$\max_{0\leqslant i\leqslant l}\{\|WS_{i0}\|_\infty\}<1\Leftrightarrow|W|<\min_{0\leqslant i\leqslant l}\inf_\omega|1+L_{i0}(\mathrm{j}\omega)| \tag{3.5.4}$$

如果 $l+1$ 个对象 $P_i(i=0,1,\cdots,l)$对应的开环传函 $L_{i0}=P_iC_0(i=0,1,\cdots,l)$是最小相位的,且 $L_{i0}(0)>0$,为保证 C_0 能同时镇定 $P_i(i=0,1,\cdots,l)$,奈氏曲线 $L_{i0}(i=0,1,\cdots,l)$均应不绕

3.5 同时镇定参数化控制器的应用

我们在3.4节得到了同时镇定控制器的参数化公式，即定理3.4.1。类似于Youla的参数化公式，利用定理3.4.1给出的同时镇定控制器参数化公式(3.4.1)，可对同时镇定系统的各种性能进行设计。与Youla参数化公式不同的是，利用同时镇定参数化公式进行性能设计，需验证一个约束条件，即式(3.4.2)是否成立。

3.5.1 同时镇定 H_∞ 性能设计

考虑图3.1.2所示SISO单位反馈系统。对同时镇定问题来说，被控对象 P 是可变的，设为 $P_0, P_1, \cdots, P_l$。我们所要求解的问题是：

【问题3.5.1】 给定 $P_0, P_1, \cdots, P_l$，设计控制器 C，使得闭环系统达到

(1) C 同时镇定 $P_0, P_1, \cdots, P_l$。

(2) 对 $P_0, P_1, \cdots, P_l, C$ 使系统均具有 H_∞ 性能。

【定义3.5.1】(H_∞ 性能) $l+1$ 个对象 $P_0, P_1, \cdots, P_l$ 的同时镇定 ∞－范数性能指标为

$$\max_{0 \le i \le l}\{\| WS_{i0} \|_\infty\} < 1 \tag{3.5.1}$$

其中灵敏度函数 $S_{i0} = \dfrac{1}{1 + P_i C_0(Q_0)} = \dfrac{1}{1 + L_{i0}} (i = 0, 1, \cdots, l)$。

这里取 P_0 为主对象，$C_0(Q_0)$ 为式(3.4.1)给出的参数化主控制器。

以下讨论中，假定对象 $P_i(i = 0, 1, \cdots, l)$ 是最小相位的(见定义3.2.2)。

首先，对非同时镇定问题的性能指标式(3.2.1)做如下几何解释。注意到

$$\| WS \|_\infty < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{W(\mathrm{j}\omega)}{1 + L(\mathrm{j}\omega)} \right| < 1, \forall \omega \Leftrightarrow | W(\mathrm{j}\omega) | < | 1 + L(\mathrm{j}\omega) |, \forall \omega \tag{3.5.2}$$

最后一个不等式指的是在每一频率 ω 下，奈氏曲线 $L(\mathrm{j}\omega)$ 上的点都位于以$(-1, \mathrm{j}0)$为圆心，$|W(\mathrm{j}\omega)|$ 为半径的圆外，如图3.5.1所示。如果取权函数 $W(\mathrm{j}\omega) = W =$ 常数，则

$$\| WS \|_\infty < 1 \Leftrightarrow | W | < |1 + L(\mathrm{j}\omega)|, \forall \omega \Leftrightarrow$$
$$| W | < \inf_\omega |1 + L(\mathrm{j}\omega)| \tag{3.5.3}$$

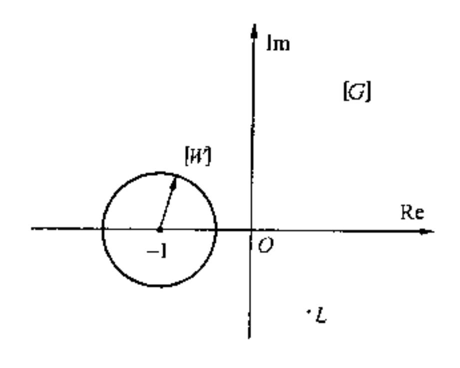


图3.5.1 图示性能指标

而 $\inf_\omega |1 + L(\mathrm{j}\omega)| =$ 从 -1 点到奈氏曲线上的最近点的距离。众所周知，如果 L 是最小相位的，且 $L(0) > 0$，则奈氏曲线 $L(\mathrm{j}\omega)$ 起始于正实轴，且如果 L 是严格正则的，最终将按顺时针方向趋于原点。根据奈氏判据，如果 L 的幅角在穿越频率处大于 $-180°$(或者 L 不绕过点$(-1, \mathrm{j}0)$，则可保证内稳定性(此即所谓的小增益定理)。也就是说，如果某对象 P 对应的开环传函 L 是最小相位的，应用Youla的内稳定参数化控制器做 H_∞ 性能设计，等价于选择正则的 C，使奈氏曲线 $L(\mathrm{j}\omega)$ 不绕过点$(-1, \mathrm{j}0)$，且使式(3.5.3)的最后一个不等式成立。

同样可对同时镇定性能指标(3.5.1)做出几何解释。我们有

$$\max_{0 \le i \le l}\{\| WS_{i0} \|_\infty\} < 1 \Leftrightarrow | W | < \min_{0 \le i \le l} \inf_\omega | 1 + L_{i0}(\mathrm{j}\omega) | \tag{3.5.4}$$

如果 $l+1$ 个对象 $P_i(i = 0, 1, \cdots, l)$ 对应的开环传函 $L_{i0} = P_i C_0 (i = 0, 1, \cdots, l)$ 是最小相位的，且 $L_{i0}(0) > 0$，为保证 C_0 能同时镇定 $P_i(i = 0, 1, \cdots, l)$，奈氏曲线 $L_{i0}(i = 0, 1, \cdots, l)$ 均应不绕

过点$(-1,\mathrm{j}0)$。也就是说，应用同时镇定控制器参数化公式做同时镇定 H_∞ 性能设计，等价于选择正则的 C，使奈氏曲线 $L_{i0}(\mathrm{j}\omega)(i=0,1,\cdots,l)$ 均不绕过点$(-1,\mathrm{j}0)$，且使式(3.5.4)的最后一个不等式成立。这样，我们就可取其开环传函 $L_{i0}(i=0,1,\cdots,l)$ 距点$(-1,\mathrm{j}0)$有最近距离的对象作为主对象，进行性能设计，而其余对象自然满足性能指标(3.5.1)。这里关键问题是如何从 $l+1$ 个对象 $P_i(i=0,1,\cdots,l)$ 中确定其开环传函 $L_{i0}(i=0,1,\cdots,l)$ 距式$(-1,\mathrm{j}0)$有最近距离的对象(主对象)。为此，我们做如下假设。

【假设 3.5.1】 $l+1$ 个对象 $P_0,P_1,\cdots,P_l$ 均是最小相位的，且 $P_i(0)>0(i=0,1,\cdots,l)$。

【假设 3.5.2】 按主对象做同时镇定控制器参数化而得到的主控制器 C_0 无 $\mathrm{Re}\ s\geqslant 0$ 平面内的极、零点，且至多有一个原点处的极点。

以上两点假设可保证开环传函 $L_{i0}(i=0,1,\cdots,l)$ 起始于正实轴(若 C_0 有一原点处的极点，则 L_{i0} 起始于负虚轴)，且不围绕点$(-1,\mathrm{j}0)$，相应的闭环是稳定的(同时镇定)。

以上讨论是在假设权函数 $W(\mathrm{j}\omega)$ 不依赖于频率 ω 的条件下进行的。一般情况下，常取 $|W(\mathrm{j}\omega)|$ 为 W 的减函数，即具有低通滤波器的性质(如例 3.2.1 所取)。在某一频段内，可将其视为常数。

能否由对象奈氏曲线间相互关系，确定开环传函间相互关系呢？对某一类对象，我们说是可以的。先引入下面的定义。

【定义 3.5.2】(嵌套) 两最小相位对象 P_1、P_2 的奈氏曲线间如有关系：$\phi_2(\omega)\leqslant\phi_1(\omega)$，$\forall\omega$，如图 3.5.2 所示，且当等号成立时，有 $|P_1|<|P_2|$，则称 P_1、P_2 间具有奈氏曲线意义下的“嵌套”结构，称 P_1 可“嵌入” P_2 中。

根据定义 3.5.2，若 P_1 可嵌入 P_2 中，则 P_1、P_2 的奈氏曲线间有关系：$\inf\limits_{\omega}|1+P_2|<\inf\limits_{\omega}|1+P_1|$，即 P_2 距点$(-1,\mathrm{j}0)$有更近的最短距离。

利用定义 3.5.2 给出的概念，我们有如下定理。

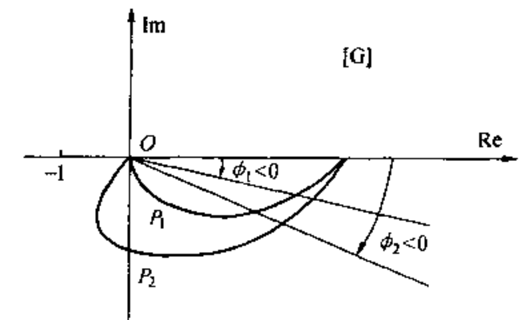


图 3.5.2 奈氏曲线下嵌套结构

【定理 3.5.1】 同时增加具有奈氏曲线意义下嵌套结构的两最小相位对象 P_1、P_2 的零点或极点，P_1、P_2 间嵌套关系保持不变。

【证明】 以增加零点为例。设 P_1 可嵌入 P_2 中，即 $\phi_2(\omega)\leqslant\phi_1(\omega)$，$\forall\omega$，且当等号成立时，有 $|P_1|<|P_2|$。P_1、P_2 同时增加零点 $-z$ 后，变为 $P_1(s+z)$ 和 $P_2(s+z)$，相应的相角记为 $\phi_{z1}(\omega)$ 和 $\phi_{z2}(\omega)$，模记为 $|P_{z1}|$ 和 $|P_{z2}|$，则 $\phi_{z1}(\omega)=\phi_1(\omega)+\arctan\omega/z$，$\phi_{z2}(\omega)=\phi_2(\omega)+\arctan\omega/z$，$|P_{z1}|=|P_1|\sqrt{\omega^2+z^2}$，$|P_{z2}|=|P_2|\sqrt{\omega^2+z^2}$。

由前面假设，P_1 可嵌入 P_2 中，即可得 $\phi_{z2}(\omega)<\phi_{z1}(\omega)$，$\forall\omega$，且当等号成立时，有 $|P_{z1}|<|P_{z2}|$。即 $P_{z1}=P_1(s+z)$ 可嵌入 $P_{z2}=P_2(s+z)$ 中。

同理可证同时增加极点的情况。 **证毕**

【推论 3.5.1】 对具有奈氏曲线意义下嵌套结构的两最小相位对象 P_1、P_2，同时串联满足假设 3.5.2 的控制器 C_0，则 P_1 和 P_2 间嵌套关系不变。

【证明】 事实上，P 和 C_0 串联，无非是增加 P 的零点和极点。由定理 3.2.1，推论得证。

证毕

根据推论 3.5.1,对于一类具有奈氏曲线意义下嵌套结构的最小相位对象 $P_0,P_1,\cdots,P_l$,其同时镇定 H_∞ 性能设计问题归结为在 $P_0,P_1,\cdots,P_l$ 中确定 $P_k=\min\limits_{0\le i\le l}\inf\limits_{\omega}|1+P_i(\omega)|$(不妨取 $K=1$),然后,以 P_1 为主对象,做控制器参数化,再做 ∞ - 范数性能 $\|WS_{0o}\|_\infty<1$ 设计。此时,自然有 $\|WS_{io}\|_\infty<1(i=1,2,\cdots,l)$,即定义 3.5.1 中同时镇定 H_∞ 性能指标(3.5.1)成立。

最后,根据以上讨论,给出求解问题 3.5.1 的步骤如下:输入 $P_0,P_1,\cdots,P_l,W$。

Step 1　确定 $P_0,P_1,\cdots,P_l$ 间奈氏曲线意义下的嵌套关系,找到 $P_1=\min\limits_{1\le i\le l}\inf\limits_{\omega}|1+P_i(\omega)|$,即 P_1 距 $(-1,\mathrm{j}0)$ 点具有最近的距离。

Step 2　以 P_1 为主对象,做控制器参数化。

Step 3　令 K 等于 P_1 的相对阶次。选择 τ 足够小,使得 $\|W(1-J)\|_\infty<1$,其中 J 如式(3.2.2)所示。

Step 4　取 $Q_0=P_0^{-1}J$,设 $C_0=Q_0/(1-P_0Q_0)$(注意 P_0 是最小相位的)。验证 C_0 是否满足假设 3.5.2。

Step 5　验证同时镇定约束条件 $C_0(Q_0)=C_i(Q_i)(i=1,2,\cdots,l)$是否成立。

【例 3.5.1】　取两个最小相位传函和权函数

$$P_1=\frac{1}{(s+1)(s+2)},P_2=\frac{1}{s+2},W=\frac{100}{s+1}$$

Step 1　$\phi_2(\omega)=-\arctan\omega/2,\phi_1(\omega)=-\arctan\omega/2-\arctan\omega$,显然有 $\phi_1(\omega)<\phi_2(\omega),\forall\omega$。即 P_2 可嵌入 P_1 中。P_1、P_2 的奈氏曲线如图 3.5.3 中虚线所示。

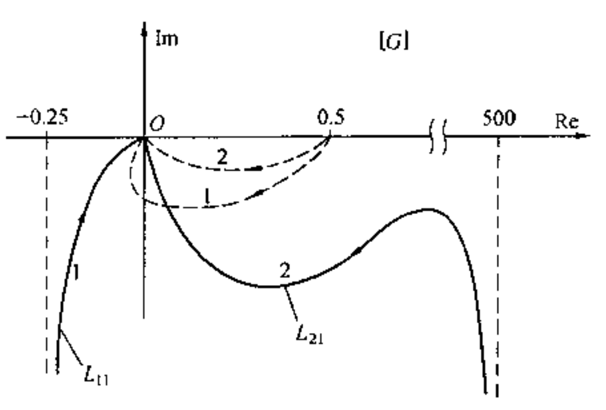


图 3.5.3　奈氏曲线

Step 2　取 P_1 为主对象,做控制器参数化。

Step 3　取 $K=2$,选 τ 使得 $W(1-J)=\frac{100}{s+1}[1-\frac{1}{(\tau s+1)^2}]$的 ∞ - 范数 <1。逐渐减小 τ,求得的范数为

τ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$\|\cdot\|_\infty$	16.6	1.66	0.166

因此取 $\tau=10^{-3}$。

Step 4　取 $Q_1=P_1^{-1}J=\frac{(s+1)(s+2)}{(10^{-3}s+1)^2}$

设

$$C_1=\frac{Q_1}{1-P_1Q_1}=\frac{10^3(s+1)(s+2)}{s(10^{-3}s+2)}$$

可见 C_1 满足假设 3.5.2。

Step 5　验证 $C_1(Q_1)=C_2(Q_2)$,即 $Q_1-Q_2-P_2Q_1Q_2+P_1Q_1Q_2=0$,是否成立。解得

$$Q_2=\frac{(s+1)(s+2)}{10^{-6}s^2+1.002s+1}$$

可验证 $Q_2\in RH_\infty$,且 $\|WS_{21}\|_\infty=0.1<\|WS_{11}\|_\infty=0.166<1$。此时,$L_{11}=P_1C_1$ 和 $L_{21}=$

P_2C_1 的大致图形如图 3.5.3 中实线所示。可见 L_{11} 比 L_{21} 距点(-1,j0)有更近的距离。

3.5.2 同时镇定渐近性能设计

仍然考虑图 3.1.2 所示 SISO 单位反馈系统的同时镇定问题。

【定义 3.5.3】(渐近性能) 如果存在一个正则的控制器 $C(s)$,能同时镇定 $l+1$ 个对象 $P_i(s)(i=0,1,\cdots,l)$,且使得对任意的 $r(t)$ 和 $d(t)$,均有

$$\lim_{t\to\infty} e_{rdi}(t) = \lim_{t\to\infty}[r(t) - y_i(t)] = 0 \qquad i = 0,1,2,\cdots,l \tag{3.5.5}$$

则称图 3.1.2 所示反馈系统达到了同时镇定渐近跟踪与干扰抑制。其中 $e_{rdi}(i=0,1,\cdots,l)$ 表示 $r(t)$ 和 $d(t)$ 共同起作用,产生的偏差信号。当 $d(t)=0$ 时,有

$$\lim_{t\to\infty} e_{ri}(t) = \lim_{t\to\infty}[r(t) - y_i(t)] = 0 \qquad i = 0,1,\cdots,l \tag{3.5.6}$$

称为同时镇定渐近跟踪。其中 $e_{ri}(i=0,1,\cdots,l)$ 表示 $r(t)$ 单独作用,产生的偏差信号。当 $r(t)=0$ 时,有

$$\lim_{t\to\infty} e_{di}(t) = \lim_{t\to\infty}[-y_i(t)] = 0 \qquad i = 0,1,\cdots,l \tag{3.5.7}$$

称为同时镇定干扰抑制。其中 $e_{di}(t)(i=0,1,\cdots,l)$ 表示 $d(t)$ 单独作用,产生的偏差信号。

对输入信号 $r(t)$ 和 $d(t)$ 的性质,我们做如下讨论[20]。设 $r(t)$ 和 $d(t)$ 的 Laplace 变换分别为

$$R(s) = \mathscr{L}\{r(t)\} = \frac{N_r(s)}{D_r(s)}, D(s) = \mathscr{L}\{d(t)\} = \frac{N_d(s)}{D_d(s)} \tag{3.5.8}$$

其中多项式 $D_r(s)$ 和 $D_d(s)$ 是已知的,而多项式 $N_r(s)$ 和 $N_d(s)$ 是任意的,只要求 $R(s)$ 和 $D(s)$ 正则。$r(t)$ 和 $d(t)$ 中,当 $t\to\infty$ 时,趋于零的部分对 $y(t)$ 的影响,在 $t\to\infty$ 时,也趋于零。此时,若 $C(s)$ 同时镇定 $P_i(s)(i=0,1,\cdots,l)$,则式(3.5.5)自动成立,问题成为平凡的。因此,假定 $D_r(s)$ 和 $D_d(s)$ 的某些根具有零实部或正实部。

【定理 3.5.2】 对于图 3.1.2 所示 SISO 同时镇定反馈系统,信号 $r(t)$ 和 $d(t)$ 由式(3.5.8)描述。应用定理 3.4.1 给出的同时镇定控制器参数化结果,如果选择参数 $Q_0\in RH_\infty$,能使 $(X_0-N_0Q_0)$ 的零点与 $D_r(s)$ 和 $D_d(s)$ 的不稳定根相消,且 $C_0(Q_0)$ 同时镇定 $P_i(i=0,1,\cdots,l)$,则可实现同时镇定渐近跟踪与干扰抑制。

【证明】 取 P_0 为主对象,相应的参数化主控制器为

$$C_0(Q_0) = \frac{Y_0 + M_0Q_0}{X_0 - N_0Q_0}$$

令 $d(t)=0$,从 $r(t)$ 到 $e_i(t)$ 的传函为

$$G_{eri}(s) = \frac{1}{1 + P_i(s)C_0(Q_0)} = \frac{1}{1 + \dfrac{N_i}{M_i}\dfrac{Y_0 + M_0Q_0}{X_0 - N_0Q_0}} =$$

$$\frac{M_i(X_0 - N_0Q_0)}{(M_iX_0 + N_iY_0) + (N_iM_0 - M_iN_0)Q_0} \qquad i = 0,1,\cdots,l$$

令 $D_{fi}(s) = (M_iX_0 + N_iY_0) + (N_iM_0 - M_iN_0)Q_0$,则

$$G_{eri}(s) = \frac{M_i}{D_{fi}(s)}(X_0 - N_0Q_0) \qquad i = 0,1,\cdots,l$$

类似地,令 $r(t)=0$,从 $d(t)$ 到 $e_i(t)$ 的传函为

$$G_{edi}(s) = -\frac{P_i(s)}{1+P_i(s)C_0(Q_0)} = -\frac{N_i}{D_{fi}(s)}(X_0 - N_0Q_0) \qquad i=0,1,\cdots,l$$

于是，$r(t)$和 $d(t)$共同起作用，引起的 $e_i(t)$的 Laplace 变换为

$$E_{rdi}(s) = G_{eri}(s)R(s) + G_{edi}(s)D(s) \qquad i=0,1,\cdots,l$$

由定理中条件，选择参数 $Q_0 \in RH_\infty$，使 $C_0(Q_0)$同时镇定 $P_i(i=0,1,\cdots,l)$，则传函 $G_{eri}(s)$和 $G_{edi}(s)(i=0,1,\cdots,l)$均为稳定的，且此参数 Q_0，使 $E_{rdi}(s)$中的有理函数$(X_0-N_0Q_0)$的零点与多项式 $D_r(s)$和 $D_d(s)$中的不稳定根相消（一种保证成功的零极相消的插值方法，见下例），则留在 $E_{rdi}(s)$中的都是稳定极点。因此，对任意的多项式 $N_r(s)$和 $N_d(s)$均有

$$\lim_{t\to\infty} e_{rdi}(t) = 0 \qquad i=0,1,\cdots,l$$

由定义 3.5.3 实现了同时镇定渐近跟踪和干扰抑制。 **证毕**

注　有理函数$(X_0-N_0Q_0)$的零点，实为控制器 $C_0(Q_0)$的极点。定理中的选择参数 $Q_0 \in RH_\infty$，实现零极点相消的过程，其实就是将信号 $r(t)$和 $d(t)$中的不稳定模式引入控制器中，即众所周知的内模原理。

最后，通过例题说明同时镇定渐近跟踪与干扰抑制问题的设计步骤。

【例 3.5.2】 令

$$P_1 = \frac{1}{s-1},\ P_2 = \frac{2s+3}{(s+1)(s-1)}$$

求一个正则的控制器 C，使得：

(1) C 同时镇定 P_1、P_2。

(2) 当 $d(t)=0$ 时，输出 $y_i(t)(i=1,2)$渐近跟踪单位阶跃参考信号 $r(t)$。

(3) 当 $r(t)=0$，且干扰信号 $d(t)$为频率是 1 rad/s 的正弦时，$y_i(t)(i=1,2)$的终值等于零。

【解】 对 P_1、P_2 进行稳定互质分解，有

$$N_1 = \frac{1}{s+1}, \qquad M_1 = \frac{s-1}{s+1}, \qquad Y_1 = 2, \qquad X_1 = 1$$

$$N_2 = \frac{2s+3}{(s+1)^2}, \qquad M_2 = \frac{s-1}{s+1}, \qquad Y_2 = \frac{4}{5}, \qquad X_2 = \frac{5s+7}{5(s+1)}$$

取 P_1 为主对象，由定理 3.4.1，同时镇定控制器为 $C_1(Q_1) = (Y_1 + M_1Q_1)/(X_1 - N_1Q_1)$，约束条件为 $C_1(Q_1) = C_2(Q_2)$，$Q_1, Q_2 \in RH_\infty$。

信号 $r(t)$和 $d(t)$的 Laplace 变换为 $R(s) = \frac{1}{s}$和$D(s) = \frac{1}{s^2+1}$，分别在 $R(s)$和 $D(s)$的不稳定极点 $s=0$ 和 $s=\mathrm{j}$ 处对 $X_1 - N_1Q_1$ 进行插值，有

$$X_1(0) - N_1(0)Q_1(0) = 0,\ X_1(\mathrm{j}) - N_1(\mathrm{j})Q_1(\mathrm{j}) = 0$$

解得

$$Q_1(0) = 1 \tag{3.5.9}$$

$$Q_1(\mathrm{j}) = 1 + \mathrm{j} \tag{3.5.10}$$

方程(3.5.10)等价于两个实数方程

$$\mathrm{Re}\ Q_1(\mathrm{j}) = 1 \tag{3.5.11}$$

$$\mathrm{Im}\ Q(\mathrm{j}) = 1 \tag{3.5.12}$$

因此，应选择 $Q_1 \in RH_\infty$，满足式(3.5.9)、(3.5.11)和式(3.5.12)的插值条件。一种保证

成功的方法是令 Q_1 为具有足够可变系数的$(s+1)^{-1}$(一般可取$(s+a)^{-1}, a>0$)的多项式,这保证了 $Q_1 \in RH_\infty$。对本列,取

$$Q_1(s) = x_1 + \frac{x_2}{s+1} + \frac{x_3}{(s+1)^2}$$

解得 $x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = 2$,于是

$$Q_1(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{(s+1)^2} \in RH_\infty$$

$$C_1(s) = C_1(Q_1) = \frac{5s^3 + 5s^2 + 5s + 1}{s(s^2+1)}$$

由约束条件 $C_1(Q_1) = C_2(Q_2)$,解得

$$Q_2(s) = \frac{24s^4 + 56s^3 + 56s^2 + 36s + 7}{11s^4 + 25s^3 + 25s^2 + 16s + 3}$$

可验证 Q_2 的分母为霍尔维茨多项式,故 $Q_2 \in RH_\infty$。由 $C_1(s)$的表达式可见,其极点包含了信号 $r(t)$和 $d(t)$的不稳定模态,实现了内模配置,且参数 Q_1、Q_2 满足同时镇定约束条件。因此,该控制器可实现同时镇定渐近跟踪与干扰抑制。

习　　题

3.1　计算传函

$$g(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

在 RH_∞中的互质分解。

3.2　计算传函阵

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

在 RH_∞中的互质分解。

3.3　利用式(3.1.2)式验证式(3.1.4)。(提示:在频域中进行推导)

3.4　考虑图 3.1.2 所示单位反馈系统。设

$$P(s) = \frac{s}{(s-1)(10s+1)}$$

试应用定理 3.1.4 求一控制器 $C(s)$,使系统达内稳定,并求出闭环极点及从 d 到 y 的直流增益。

3.5　考虑图 3.1.2 所示单位反馈系统。已知 P 是最小相位的但有一极点在虚轴上,考察性能设计问题。取

$$P(s) = \frac{1}{s}, W_1(s) = \frac{100}{s+1}$$

P 摄动到 $P(s) = 1/(s+\epsilon), \epsilon > 0$。设计一控制器 C(可内稳定的),使得 $\| W_1 S \|_\infty < 1$。在 C 的系数中令 $\epsilon \to 0$,试问这一控制器是否能让原对象 P 达到性能要求。

3.6　考虑图 3.1.2 所示单位反馈系统。已知

$$P(s)=\frac{10}{(s-1)(s+2)}$$

计算一可内稳定的 C,使得跟踪误差 $y-r$ 的2－范数最小，r 为单位阶跃输入。

3.7 试判断

$$P_0(s)=\frac{1}{s+1}\text{和 } P_1(s)=\frac{10}{(s-1)(s+2)}$$

是否可同时镇定？

3.8 对上题中的两个对象 P_0 和 P_1，试应用定理3.4.1，求 P_0 和 P_1 的同时镇定控制器。

3.9 在定理3.4.1的证明中，取 $C_0(Q_0)=(\widetilde{X}_0-Q_0\widetilde{N}_0)^{-1}(\widetilde{Y}_0+Q_0\widetilde{M}_0)$，$C_j(Q_j)=(Y_j+M_jQ_j)(X_j-N_jQ_j)^{-1}$，令 $C_0(Q_0)=C_j(Q_j)(j=1,2,\cdots,l)$，则可得约束条件的另一种等价表达式。试推导之。

第四章 H_∞标准控制

这一章我们将在标准框架下讨论 H_∞ 控制问题的求解。H_∞控制理论可分为频域方法和时域方法。在第三章已对频域方法做了简单的介绍，详尽内容可见文献[17]、[18]。时域状态空间方法包括 Riccati 方法和 LMI(Linear Matrix Inequality，简记为 LMI)方法。本章我们将重点介绍理论上成熟的 Riccati 方法(包括状态反馈求解方法和输出反馈求解方法)，并对近年来非常流行的 LMI 方法进行必要的讨论。H_∞控制问题与第二章讨论的状态调节器问题都是一种优化控制问题，只是性能指标不同而已。用 H_∞范数度量性能要比传统的 ISE(H_2 范数)性能更接近于实际需要，这就是近年来 H_∞控制理论兴起的原因。

4.1 问题的提出

回顾第二章对 LQ 最优调节器性质的讨论，我们证明了 LQ(LQG)状态反馈系统的幅值稳定裕度为 $0.5\sim\infty$，而相角稳定裕度大于等于 $\pm 60°$。也就是说，LQ 最优调节器具有一定的相对稳定性。然而，LQG 控制系统甚至 LQ 最优调节器对被控对象的模型摄动(模型误差)的鲁棒稳定性在某些场合却很差[39],[40]。下面通过一个实例来说明这一问题。

【例 4.1.1】 考虑 SISO 被控对象，其传函为

$$P_0(s)=\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

其状态空间最小(能控、能观测)实现为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), x(0) = x_0, y(t) = Cx(t) \tag{4.1.1}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, C=[1 \quad 1]$$

取二次型性能指标为

$$J=\int_0^\infty[y^2(t)+ru^2(t)]\mathrm{d}t, r>0$$

由 2.4 节无限时间 LQR 问题的解公式(2.4.6)，可得使性能指标 J 达极小的状态反馈控制律为

$$u(t) = -r^{-1}b^{\mathrm{T}}Px(t) = -Kx(t) \tag{4.1.2}$$

其中 P 为代数 Riccati 方程(2.4.5)的正定解。容易求得

$$K=[1+q-\sqrt{5+2q} \quad 2\sqrt{5+2q}-q-4]$$

这里

$$q=\sqrt{4+r^{-1}}$$

根据 LQ 最优调节器的性质，由式(4.1.1)和式(4.1.2)构成的状态反馈闭环系统具有大于 0.5 的幅值稳定裕度，大于等于 $\pm 60°$的相角稳定裕度。

下面考虑如下形式的模型摄动(模型误差)

$$P(s)=P_0(s)+\Delta(s)$$

其中 $P(s)$为摄动后的(实际的)被控对象传函,$\Delta(s)$为模型误差,具有如下形式

$$\Delta(s)=\frac{\varepsilon}{s+1}$$

其中 ε 为一实数。也就是说,对于 $0\leqslant\omega<\infty$,我们有

$$|P(\mathrm{j}\omega)-P_0(\mathrm{j}\omega)|=\left|\frac{\varepsilon}{\mathrm{j}\omega+1}\right|$$

上述摄动的状态空间实现描述表现为 $\boldsymbol{b}$ 矩阵的摄动

$$\boldsymbol{b}_\Delta=\boldsymbol{b}+\begin{bmatrix}\varepsilon\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\varepsilon\\1\end{bmatrix}$$

由摄动后的被控对象的状态空间实现和式(4.1.2)的状态反馈控制律,构成一个闭环系统。可以求得[17]该闭环系统具有两个闭环极点,这两个闭环极点当 $r\to0$(控制能量较小)时,将趋于如下两个实数

$$p_1=-\varepsilon q,p_2=-(1+2\varepsilon)/\varepsilon$$

可以看到,当 $-\frac{1}{2}<\varepsilon<0$ 时,p_1 和 p_2 均为正数,且$|\varepsilon|$越小,p_2 越大。也就是说,被控对象的微小模型摄动会使该闭环系统具有很大的不稳定的正实极点。

我们知道,控制系统分析或综合所依据的数学模型往往都是不精确的。由于模型的简化、非线性系统的线性化、系统中元器件的老化等原因,均会使实际被控对象的数学模型发生变化,而导致模型误差。另外,在许多实际控制问题中,我们仅知道干扰(噪声)属于某个信号的集合,而并不确知其统计特性(或能量谱)是否是高斯型的,这便使得 LQG(H_2)控制理论难以应用。

我们对上述鲁棒控制问题做一下归纳,即鲁棒控制问题的提出基于如下考虑:

(1) 被控对象不是由一个确定的模型来描述的,而仅知道其模型属于某个已知的模型集合。

(2) 外部信号(包括干扰信号、传感器噪声和指令信号等)不是具有已知特性(如统计特性或能量谱)的信号,也仅知道其属于某个已知的信号集合。

以上两种情况下,控制系统的设计,如果采用传统的 H_2 性能指标,在某些场合已不能满足实际的需要。那么,此时控制系统的设计又应该采用怎样的性能指标,设计方法又如何?

1981 年,加拿大学者 Zames 提出了以控制系统的某些信号间的传函(矩阵)的 H_∞ 范数作为优化性能指标的设计思想[23]。随后,1982 年,美国学者 Doyle 针对 H_∞ 性能指标发展了一种称为结构奇异值(Structured Singular Value,简记为 SSV)的有力工具来检验鲁棒性,这种方法极大程度地促进了以 ∞ - 范数为性能指标的控制理论的发展。正是由于 Youla 等人的控制器参数化,Zames 的 H_∞ 性能指标以及 Doyle 的结构奇异值理论揭开了反馈控制理论的新篇章[25]。其后,H_∞ 控制理论取得了蓬勃的发展[47],经历了从频域到时域[41],[42]、从定常系统到时变系统[43]、从线性系统到非线性系统[44],[45],[46]、从连续系统到离散系统[48],[49]、从确定性系统到不确定系统[50],[51]、从无时滞系统到时滞系统[52],[53],[54]以及从单目标控制到多目标控制[55],[56],[57]等的发展历程。目前线性系统的 H_∞ 控制理论已基本成熟,形成了一套完整的频域设计理论和方法,而时域状态空间的 Riccati 方法和 LMI 方法,由于具有能揭示系统的内部

结构、易于计算机辅助设计等优点而倍受重视。Matlab 已开发出了各种 H_∞ 控制理论的工具箱，为实现控制系统的分析和设计提供了极大的方便。

4.2 H_∞ 标准控制问题

实际应用中，许多控制问题都可以化归为所谓 H_∞ 标准控制问题。

考虑图 4.2.1 所示结构的控制系统。图中各信号均为向量值信号。

w 为外部输入信号，包括参考(指令)信号，干扰和传感器噪声。z 为被控输出信号，也称为评价信号，通常包括跟踪误差、调节误差和执行机构输出。u 为控制信号，y 为量测输出信号，如传感器输出信号。

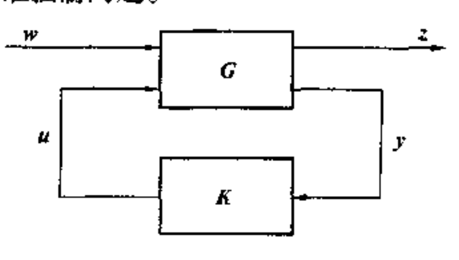


图 4.2.1 标准问题框图

图中 G 为广义被控对象，K 为控制器。G 是系统的给定部分，K 是待设计的。后面我们将看到，广义被控对象并不一定等同于实际被控对象。不同的设计目标，即使是同一被控对象，其广义被控对象也可能不同。

设广义被控对象 G 的状态空间实现为

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \tag{4.2.1a}$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \tag{4.2.1b}$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \tag{4.2.1c}$$

式中 $x \in \mathbf{R}^n, z \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^q, w \in \mathbf{R}^r, u \in \mathbf{R}^p$。相应的传递函数矩阵为

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc} A & B_1 & B_2 \\ \hdashline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right]$$

即，我们有

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s)\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$u = K(s)y$$

于是，图 4.2.1 中，从 w 到 z 的闭环传递函数阵等于

$$T_{zw}(s) = \mathrm{LFT}(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \tag{4.2.2}$$

它是 K 的线性分式变换(Linear Fractional Transformation，简记为 LFT)。

【定义 4.2.1】(H_∞ 最优控制问题)　求一正则实有理控制器 K，使闭环系统内稳定且使传递函数阵 $T_{zw}(s)$ 的 H_∞ 范数极小，即

$$\min_K \| T_{zw}(s) \|_\infty = \gamma_0 \tag{4.2.3}$$

【定义 4.2.2】(H_∞ 次优控制问题)　求一正则实有理的 K，使闭环系统内稳定，且使

$$\| T_{zw}(s) \|_\infty < \gamma \tag{4.2.4}$$

其中 $\gamma \geq \gamma_0$。

显然，如果以上两种控制问题有解，我们可以通过逐渐减小 γ 去逼近 γ_0。即由次优问题的解去逼近最优问题的解。

对 H_∞ 次优控制问题，对式(4.2.4)做变换，得

$$\left\| \frac{1}{\gamma} T_{zw}(s) \right\|_\infty < 1$$

而$\frac{1}{\gamma}T_{zw}(s)$等于广义被控对象

$$G(s) = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ \gamma^{-1}G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

和 K 所构成的图 4.2.1 所示系统的从 w 到 z 的闭环传函阵。因此，不失一般性，常取 $\gamma = 1$。

需要指出的是，H_∞最优控制问题难于求解[42]。因此，本章我们将主要讨论 H_∞次优控制问题的各种解法，并将其称为 H_∞标准控制问题。

下面以几个例子说明工程实际中，许多控制问题都可以归结为 H_∞标准控制问题。

4.2.1 干扰抑制问题

考虑图 4.2.2 所示的控制系统。图中 G_0 为被控对象，K 为控制器，r 为参考输入，y 为量测输出，d 为外部干扰（量测噪声），u 为控制。假设干扰信号 d 属于如下集合

$$D = \{ d \mid d = W(s)v, v \in H_2 \; \| v \|_2 \leqslant 1 \}$$

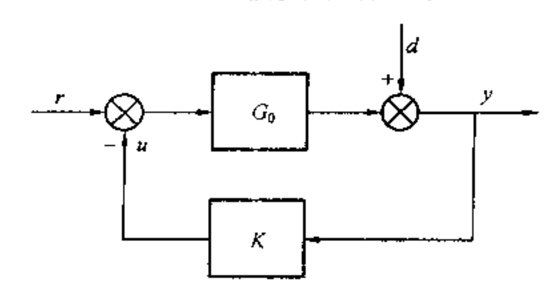


图 4.2.2 干扰抑制系统

其中 $W(s)$是稳定的实有理函数，称为权函数，用来反映在期望的频段上对干扰的抑制能力。上式表示一个能量有限（$\| v \|_2 \leqslant 1$）的干扰信号 v 通过权函数 $W(s)$形成系统的干扰输入 d。

我们的问题是设计控制器 $K(s)$，使闭环系统内稳定，且使

$$J = \sup\{ \| y \|_2 \mid v \in H_2, \| v \|_2 \leqslant 1 \}$$

极小。易知

$$y = [I + G_0(s)K(s)]^{-1} d = T_{yv}(s)W(s)v$$

其中

$$T_{yv}(s) = [I + G_0(s)K(s)]^{-1}$$

由于

$$\sup[\| y \|_2 \mid v \in H_2, \| v \|_2 \leqslant 1] = \sup[\| T_{yv}(s)W(s)v \|_2 \mid v \in H_2, \| v \|_2 \leqslant 1] =$$
$$\sup[\| T_{yv}(s)W(s)v \|_2 \mid v \in H_2, \| v \|_2 = 1] = [\| T_{yv}(s)W(s) \|_\infty$$

由此可见，对于给定集合 D 中的任意 d，使 y 的 H_2 范数（即输出信号的平方积分，也即其能量）极小的问题，便转化为使 $T_{yv}(s)W(s)$的 H_∞范数极小的问题。从而，可将干扰抑制问题转化为图 4.2.1 所示的 H_∞标准控制问题。

注意到，图 4.2.2 干扰抑制系统中，$z = y$，于是有

$$y = Wv + G_0(r - u) = [W \quad G_0] \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} - G_0 u$$

$$z = Wv + G_0(r - u)$$

$$u = Ky$$

由此得广义被控对象的传递函数阵

$$G(s) = \begin{bmatrix} [W \quad G_0] & -G_0 \\ [W \quad G_0] & -G_0 \end{bmatrix}$$

其 H_∞ 标准控制的结构框图如图 4.2.3 所示。

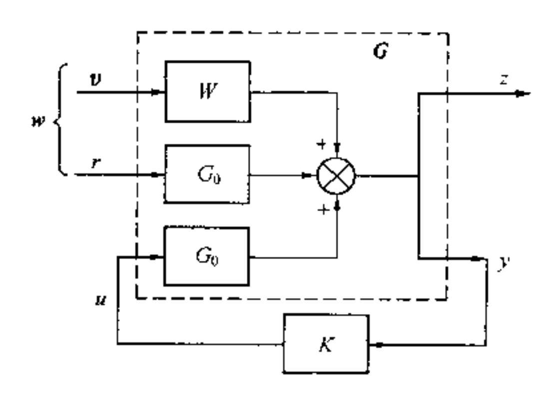


图 4.2.3 广义干扰抑制系统

图中外部输入信号 $w=\begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}$。

4.2.2 跟踪问题

考虑图 4.2.4 所示跟踪问题。$P(s)$ 为被控对象，C_1、C_2 为控制器，分别称为前馈和反馈控制器。由于增加了设计的自由度，故也将其称为二自由度系统。u 为控制信号，由图有

$$u = C_1 r + C_2 v = [C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}$$

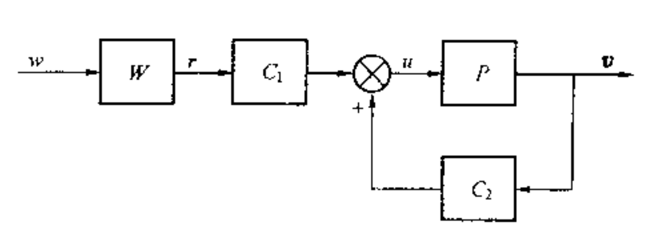


图 4.2.4 二自由度系统

参考输入(被跟踪信号)r 并不是一个已知的确定信号，而是属于某个能量有限信号的集合

$$R = \{r \mid r = Ww, w \in H_2, \|w\|_2 \leqslant 1\}$$

设计的目标是：选择控制器 C_1 和 C_2，使跟踪误差 $\|r-v\|_2^2$ 取极小。但追求这一目标所得的控制器会成为一非正则的控制器[17]，控制信号的幅度成为无穷大，无法实现。若在目标函数中增加一个能量的惩罚项，便可保证控制器为正则有理函数。因此，在跟踪问题中取

$$\|r-v\|_2^2 + \|\rho u\|_2^2$$

作为目标函数。其中 ρ 为权因子。若令

$$z = \begin{bmatrix} r-v \\ \rho u \end{bmatrix} \tag{4.2.5}$$

则上述目标函数等于 $\|z\|_2^2$。于是，跟踪问题归结为目标函数

$$\sup[\|z\|_2 \mid w \in H_2, \|w\|_2 \leqslant 1]$$

的极小化问题。

为将跟踪问题化归为 H_∞ 标准控制问题，取式(4.2.5)的 z 为被控输出，量测输出取为

$$y = \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}$$

外部输入信号为 w，控制信号为 u。可得广义被控对象和控制器方程为

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r-v \\ \rho u \\ r \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & -P \\ 0 & \rho I \\ W & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$u = [C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}$$

相应的 G 和 K 为

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

$$G_{11}=\begin{bmatrix}W\\0\end{bmatrix},G_{12}=\begin{bmatrix}-P\\\rho I\end{bmatrix},G_{21}=\begin{bmatrix}W\\0\end{bmatrix},G_{22}=\begin{bmatrix}0\\P\end{bmatrix}$$

$$K=[C_1\quad C_2]$$

其 H_∞ 标准控制的结构图如图 4.2.5 所示。

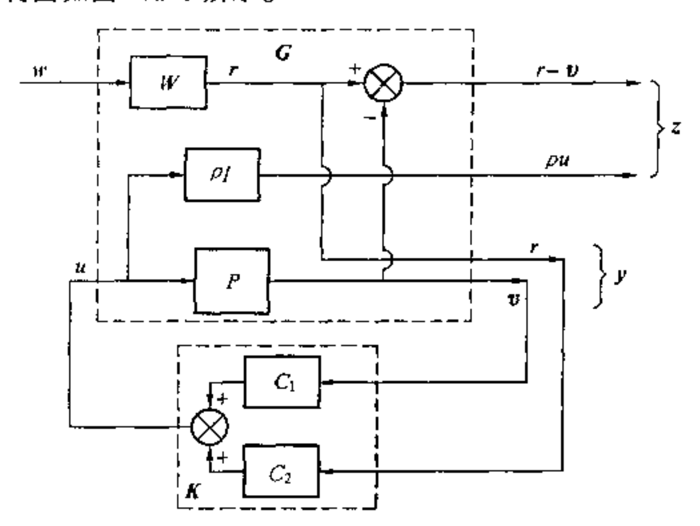


图 4.2.5　H_∞ 标准控制框图

4.2.3　鲁棒稳定问题

设被控对象的传函阵为

$$P(s)=P_0(s)+\Delta(s)$$

其中，$P_0(s)$为对象的标称数学模型，$\Delta(s)$为对象的未建模动态，即模型误差。设 $P_0(s)$和 $\Delta(s)$均为正则有理函数(阵)，且存在 $r(s)\in RH_\infty$，使得

$$\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)\leqslant|r(j\omega))|,\forall\omega$$

即未建模动态的增益有界。满足上述条件的被控对象可由如下集合来描述

$$A(P_0,r)=\{P(s)=P_0(s)+\Delta(s)|\ \|\Delta(j\omega)\|_\infty\leqslant|r(j\omega)|,\forall\omega\}$$

【定义 4.2.1】　考虑图 4.2.6 所示反馈系统。设 $P_0(s)$、$r(s)$和控制器 $K(s)$给定。若 $\forall P(s)\in A(P_0,r)$，该系统稳定的，则称系统是，鲁棒稳定的，且称 $K(s)$为鲁棒稳定控制器。

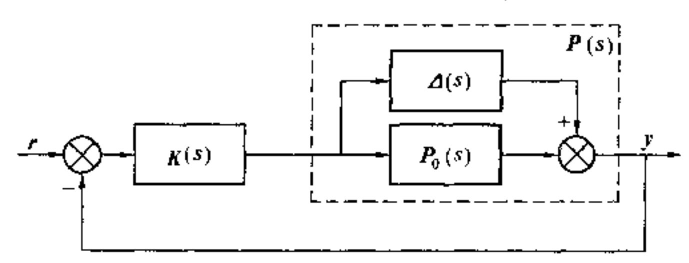


图 4.2.6　具模型摄动的反馈系统

由定义知，图 4.2.6 所示系统鲁棒稳定的必要条件是标称闭环系统($\Delta=0$)是稳定的。此条件等价于传函阵

$$G(s)=[I+K(s)P_0(s)]^{-1}K(s)\in RH_\infty$$

图 4.2.6 所示系统可以等价地表示为图 4.2.7。

因此,如果 $G(s)\in RH_\infty$,且 $\Delta(s)\in RH_\infty$,则由小增益量定理(Nyquist 判据)可知,该系统鲁棒稳定的一个充分条件为

$$\| r(s)[I+K(s)P_0(s)]^{-1}K(s)\|_\infty < 1 \tag{4.2.6}$$

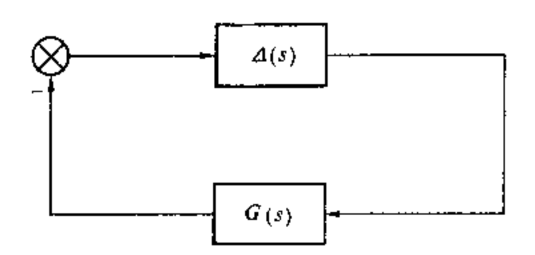


图 4.2.7　系统的鲁棒稳定性

这是因为如果上式成立,则

$$\|\Delta\|_\infty \|G\|_\infty \leqslant \|r\|_\infty \|G\|_\infty = \|r(s)G(s)\|_\infty < 1$$

即小增益条件成立。

事实上,可以证明,即使 $\Delta(s)$不稳定,只要 $P(s)\in A(P_0,r)$和 $P_0(s)$在 s 闭右半平面具有相同数目的极点,则条件(4.2.6)是图 4.2.6 所示系统鲁棒稳定的充分必要条件。

【定理 4.2.1】[19]　设 $K(s)$和 $A(P_0,r)$给定,且任意 $P(s)\in A(P_0,r)$的在 s 闭右半平面的极点个数与 $P_0(s)$的相同,则图 4.2.6 所示闭环系统鲁棒稳定的充分必要条件是当 $\Delta(s)=0$ 时,标称系统稳定,且式(4.2.6)成立。

若定义广义被控对象为

$$G=\begin{bmatrix} 0 & rI \\ I & -P_0 \end{bmatrix}$$

则鲁棒稳定问题化为图 4.2.8 所示的 H_∞ 标准控制问题,即选择 K 使 G 稳定,且使从 w 到 z 的传函阵

$$T_{zw}=\mathrm{LFT}(G,K)=r(I+KP_0)^{-1}K=rK(I+P_0K)^{-1}$$

的 H_∞ 范数满足

$$\|T_{zw}\|_\infty = \|r(I+KP_0)^{-1}K\|_\infty < 1$$

图 4.2.8　H_∞ 标准控制框图

4.3　Riccati 方程与 H_∞ 范数

4.3.1　Hamiltonia 矩阵与 Riccati 方程的解

考虑代数 Riccati 方程和相应矩阵 H

$$PA+A^{\mathrm T}P-PBB^{\mathrm T}P+C^{\mathrm T}C=0 \tag{4.3.1}$$

$$H = \begin{bmatrix} A & -BB^{T} \\ -C^{T}C & -A^{T} \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \tag{4.3.2}$$

其中,$A\in \mathbf{R}^{n\times n}$、$B\in \mathbf{R}^{n\times p}$、$C\in \mathbf{R}^{q\times n}$均为常阵,且 B 为列满秩,C 为行满秩。

【定义 4.3.1】 如果 $2n\times 2n$ 阵 H 满足

$$J^{-1}H^{T}J = -H \qquad (J^{-1}H^{*}J = -H) \tag{4.3.3}$$

则称 H 为 Hamiltonia 矩阵。其中

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \qquad J^{T} = J^{-1} = -J$$

称为逆反对称矩阵。

Hamiltonia 矩阵与 Riccati 方程具有以下关系

$$[P \quad -I]H\begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} = 0 \tag{4.3.4}$$

【引理 4.3.1】 若 Hamiltonia 矩阵 H 没有虚轴上的特征值,则 H 矩阵具有性质:若 $\lambda_i\in\lambda(H), i=1,2,\cdots,n$,则 $-\lambda_i\in\lambda(H), i=1,2,\cdots,n$。即 H 的特征值以虚轴、实轴为对称。

注意到矩阵 H 满足式(4.3.3),于是引理的结论成立。

由于 Hamiltonia 矩阵具有上述性质,若假设 H 在虚轴上没有特征值,那么,H 矩阵在开左右半平面各有 n 个特征值。

【引理 4.3.2】 若系统(A,B)能稳定,(C,A)能检测,则式(4.3.2)的矩阵 H 没有虚轴上的特征值,且 H 的 Jordan 形为

$$H \sim \begin{bmatrix} J_H & 0 \\ 0 & \tilde{J}_H \end{bmatrix} \qquad J_H, \tilde{J}_H \in \mathbf{C}^{n\times n}$$

即存在 H 的非奇异特征向量阵 $W_{2n\times 2n}$,使有

$$W^{-1}HW = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}^{-1} H \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_H & 0 \\ 0 & \tilde{J}_H \end{bmatrix} \tag{4.3.5}$$

其中 $\mathrm{Re}\,\lambda(J_H)<0$,$\tilde{J}_H$ 是由 J_H 的对角线元素乘以 -1 构成的 Jordan 形矩阵。且 W_{11}和 W_{22}非奇异。

该引理的证明见文献[18]。

【定理 4.3.1】 矩阵代数 Riccati 方程(4.3.1)存在惟一解 $P=P^{T}=(W_{21}W_{11}^{-1})\geq 0$,且使 $\mathrm{Re}\,\lambda(A-BB^{T}P)<0$ 的充分必要条件是(A,B)能稳定,$(C.A)$能检测。若还有(C,A)能观测,则有 $P>0$。

【证明】 充分性。

(1) 解的存在性。若(A,B)能稳定,(C,A)能检测,则由引理 4.3.2 可知,式(4.3.2)的矩阵 H 没有虚轴上的特征值,并存在 W,使式(4.3.5)成立。其中 W_{11}可逆,由式(4.3.5),可得

$$H\begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{bmatrix} J_H \tag{4.3.6}$$

记 $W_1 = \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{bmatrix}$,则上式可写为

$$HW_1 = W_1 J_H \tag{4.3.7}$$

由式(4.3.6),得

$$AW_{11}-BB^{\mathrm{T}}W_{21}=W_{11}J_H \tag{4.3.8a}$$

$$-C^{\mathrm{T}}CW_{11}-A^{\mathrm{T}}W_{21}=W_{21}J_H \tag{4.3.8b}$$

将式(4.3.8a)右乘 W_{11}^{-1},左乘 $W_{21}W_{11}^{-1}$,式(4.3.8b)右乘 W_{11}^{-1},则有

$$W_{21}W_{11}^{-1}A-W_{21}W_{11}^{-1}BB^{\mathrm{T}}W_{21}W_{11}^{-1}=W_{21}J_HW_{11}^{-1}$$

$$-C^{\mathrm{T}}C-A^{\mathrm{T}}W_{21}W_{11}^{-1}=W_{21}J_HW_{11}^{-1}$$

上两式相减,得

$$(W_{21}W_{11}^{-1})A+A^{\mathrm{T}}(W_{21}W_{11}^{-1})-(W_{21}W_{11}^{-1})BB^{\mathrm{T}}(W_{21}W_{11}^{-1})+C^{\mathrm{T}}C=0$$

因此,$P=W_{21}W_{11}^{-1}$为方程(4.3.1)的解。

(2) 解的对称性。由式(4.3.3),有

$$H^{\mathrm{T}}J+JH=0$$

将上式左乘 W_1^*,右乘 W_1,并考虑到式(4.3.7),则有

$$J_H^*W_1^*JW_1+W_1^*JW_1J_H=0$$

因为 J_H 没有虚轴上的特征值,故欲使上式成立,必有 $W_1^*JW_1=0$,即有

$$W_{11}^*W_{21}=W_{21}^*W_{11} \tag{4.3.9}$$

即解 $P=W_{21}W_{11}^{-1}$是对称的。

(3) $A-BB^{\mathrm{T}}P$ 为稳定阵。将式(4.3.8a)右乘 W_{11}^{-1},则有

$$A-BB^{\mathrm{T}}(W_{21}W_{11}^{-1})=A-BB^{\mathrm{T}}P=W_{11}J_HW_{11}^{-1}$$

因为 $\mathrm{Re}\,\lambda(J_H)<0$,所以,$(A-BB^{\mathrm{T}}P)$为稳定阵。即 $\mathrm{Re}\,\lambda(A-BB^{\mathrm{T}}P)<0$

(4) 解的非负定性。将 Riccati 方程(4.3.1)改写为如下形式

$$(A-BB^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}P+P(A-BB^{\mathrm{T}}P)=-(C^{\mathrm{T}}C+PBB^{\mathrm{T}}P)$$

设 $\lambda\in\lambda(A-BB^{\mathrm{T}}P)$,向量 ξ 满足$(A-BB^{\mathrm{T}}P)\xi=\lambda\xi$。用 ξ^* 左乘,ξ 右乘上式,则有

$$\lambda^*\xi^*P\xi+\lambda\xi^*P\xi=-\xi^*(C^{\mathrm{T}}C+PBB^{\mathrm{T}}P)\xi$$

由此有

$$2\mathrm{Re}\,\lambda\xi^*P\xi=-\xi^*C^{\mathrm{T}}C\xi-\xi^*PBB^{\mathrm{T}}P\xi=-\|C\xi\|^2-\|B^{\mathrm{T}}P\xi\|^2 \tag{4.3.10}$$

因为(A,B)能稳定,(C,A)能检测,所以 $\|C\xi\|\geqslant0$、$\|B^{\mathrm{T}}P\xi\|\geqslant0$,而 $\mathrm{Re}\,\lambda<0$。从而必有 $P\geqslant0$。

(5) 解的惟一性。设 P_1 和 P_2 均为方程(4.3.1)的解,则有

$$P_1A+A^{\mathrm{T}}P_1-P_1BB^{\mathrm{T}}P_1+C^{\mathrm{T}}C=0$$

$$P_2A+A^{\mathrm{T}}P_2-P_2BB^{\mathrm{T}}P_2+C^{\mathrm{T}}C=0$$

且均有 $\mathrm{Re}\,\lambda(A-BB^{\mathrm{T}}P_1)<0$,$\mathrm{Re}\,\lambda(A-BB^{\mathrm{T}}P_2)<0$。将上两式相减,再整理,得

$$(A-BB^{\mathrm{T}}P_1)^{\mathrm{T}}(P_1-P_2)+(P_1-P_2)(A-BB^{\mathrm{T}}P_2)=0 \tag{4.3.11}$$

因为 $\lambda_i(A-BB^{\mathrm{T}}P_1)+\lambda_j(A-BB^{\mathrm{T}}P_2)\neq0$, $i,j=1,2,\cdots,n$,所以方程(4.3.11)必有惟一解(类似于第六章引理6.2.1),且解$(P_1-P_2)=0$,即 $P_1=P_2$。解的惟一性得证。

必要性。若方程(4.3.1)存在解 P,则取非奇异变换阵

$$T=\begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I \end{bmatrix},\quad T^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}HT=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & -BB^{\mathrm{T}} \\ -C^{\mathrm{T}}C & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A-BB^{\mathrm{T}}P & -BB^{\mathrm{T}} \\ 0 & -(A-BB^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

式中 Re $\lambda(A-BB^{\mathrm{T}}P)<0$，Re $\lambda[-(A-BB^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}]>0$。上式表明，若 P 为方程(4.3.1)的解，则式(4.3.2)的 Hamiltonia 阵没有虚轴上的特征值。如此，则根据文献[18]的引理 12.3，系统 (A,B) 能稳定，(C,A) 能检测。

最后，若系统 (A,B) 能稳定，(C,A) 能观测，则由式(4.3.10)可知，$\|C\xi\|>0$，$\|B^{\mathrm{T}}P\xi\|\geqslant 0$，而 Re $\lambda(A-BB^{\mathrm{T}}P)<0$，因此，$P>0$。同时，$(A,B)$ 能稳定，(C,A) 能观测也是 $P>0$ 的必要条件。 **证毕**

一般，我们称使 $A-BB^{\mathrm{T}}P$ 稳定的 Riccati 方程(4.3.1)的解 $P\geqslant 0$ 为稳定解。

对于更一般形式的矩阵 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P+PA-PMP+Q=0 \tag{4.3.12}$$

和相应的 Hamiltonia 矩阵

$$H=\begin{bmatrix} A & -M \\ -Q & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{4.3.13}$$

其中 $A,M,Q\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$M=M^{\mathrm{T}}$，$Q=Q^{\mathrm{T}}$，$M\geqslant 0$(或 $M\leqslant 0$)，对 Q 没有正定或非负定的限制，则有如下定理。

【定理 4.3.2】 若式(4.3.13)的矩阵 H 没有虚轴上的特征值，且 (A,M) 能稳定，则方程(4.3.12)存在惟一对称解 $P=P^{\mathrm{T}}$，且 Re $\lambda(A-MP)<0$。

此定理的证明类似于定理 4.3.1，见文献[18]。

最后，考虑如下形式的 Riccati 方程

$$PA^{\mathrm{T}}+AP+PM_2P+Q_2=0 \tag{4.3.14}$$

其中 A、Q_2 和 M_2 是给定的 $n\times n$ 维矩阵，且 Q_2 对称，M_2 正定对称。

Riccati 方程(4.3.14)的正定解 P 关于系数矩阵 M_2 和 Q_2 具有如下单调性定理[58]。

【定理 4.3.3】 设 P 是方程(4.3.14)的正定对称解，Q_1 是满足 $Q_1\leqslant Q_2$ 的对称阵，则存在正定对称阵 P_+ 满足 $P\leqslant P_+$ 和

$$P_+A^{\mathrm{T}}+AP_++P_+M_2P_++Q_1=0$$

【定理 4.3.4】 设 P 是方程(4.3.14)的正定对称解，M_1 是满足 $M_1<M_2$ 的正定对称阵。则存在正定对称阵 P_+ 满足 $P<P_+$ 和

$$P_+A^{\mathrm{T}}+AP_++P_+M_1P_++Q_2=0$$

4.3.2 H_∞ 范数的计算

由第一章的讨论，无论系统的传函阵 $G(s)\in RH_\infty$，还是 $G(s)\in RL_\infty$，其 $\|\cdot\|_\infty$ 的计算均可按下式进行

$$\|G(s)\|_\infty=\sup_{\omega}\bar{\sigma}[G(\mathrm{j}\omega)]$$

实际上，当 $G(s)$ 为标量函数时，可按上式计算 $\|\cdot\|_\infty$，而当 $G(s)$ 为矩阵函数时，按上式计算 $\|\cdot\|_\infty$ 是很麻烦的。为此，我们寻找计算 $\|\cdot\|_\infty$ 的其它途径。

设严格正则传函阵 $G(s)\in RH_\infty$，其状态空间实现为

$$G(s)=[A,B,C,D] \tag{4.3.15}$$

其中 A 为稳定阵。令 $\gamma>0$，定义 Hamiltonia 矩阵

$$H=\begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}BB^{\mathrm{T}} \\ -C^{\mathrm{T}}C & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{4.3.16}$$

则有如下定理。

【定理 4.3.5】 对如上定义的 $G(s)$，$\|G(s)\|_\infty<\gamma$ 的充分必要条件是由式(4.3.16)定义的 H 矩阵没有虚轴上的特征值。

【证明】 不失一般性，可取 $\gamma=1$。若 $\gamma\neq 1$，可将 G 改写为 $\gamma^{-1}G$，B 改写成 $\gamma^{-1}B$。根据线性系统运算规则(见附录)，我们有

$$[I-G^{\sim}(s)\ G(s)]^{-1}=\left[H,\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix},[0\quad B^{\mathrm T}],I\right] \tag{4.3.17}$$

其中 H 如式(4.3.16)(取 $\gamma=1$)，而 $G^{\sim}(s)$ 定义为 $G^{\sim}(s)=G^{\mathrm T}(-s)$。由线性系统能控性的 PBH 秩判据(见附录)，我们有

$$\operatorname{rank}\left[H-\mathrm j\omega I,\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}\right]=\operatorname{rank}\left[\begin{bmatrix}A-\mathrm j\omega I & BB^{\mathrm T} & B\\ -C^{\mathrm T}C & -A^{\mathrm T}-\mathrm j\omega I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&0&0\\0&I&0\\0&-B^{\mathrm T}&I\end{bmatrix}\right]=$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A-\mathrm j\omega I & 0 & B\\ -C^{\mathrm T}C & -A^{\mathrm T}-\mathrm j\omega I & 0\end{bmatrix}=2n,\ \forall\omega\in\mathbf R$$

最后一个等式成立是因为 A 为稳定阵，即$(A-\mathrm j\omega I)$和$(-A^{\mathrm T}-\mathrm j\omega I)$均为满秩阵。

同理，由能观性的 PBH 秩判据，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}[0\quad B^{\mathrm T}]\\ H-\mathrm j\omega I\end{bmatrix}=2n$$

因此，式(4.3.16)的矩阵 $H(\gamma=1)$在虚轴上没有不能控和不能观特征值，即式(4.3.17)在虚轴上不出现极、零点对消。故 $I-G^{\sim}(s)G(s)$在虚轴上具有零点的充分必要条件为 H 在虚轴上具有特征值。

必要性。设 $\|G\|_\infty<1$，则由最大奇异值的性质，有

$$I-G^{\mathrm T}(-\mathrm j\omega)G(\mathrm j\omega)>0,\ \forall\omega$$

故 $I-G^{\sim}(s)G(s)$在虚轴上无零点，因此，H 在虚轴上无特征值。

充分性。反证。如果 $\|G(s)\|_\infty\geqslant 1$，$\sup\bar\sigma[G(\mathrm j\omega)]\geqslant 1$，则由奇异值的连续性，存在 $\omega_0\in\mathbf R$，使得

$$\sigma[G(\mathrm j\omega_0)]=1$$

这就意味着 $G^{\mathrm T}(-\mathrm j\omega_0)G(\mathrm j\omega_0)$具有特征值 1，而矩阵 $I-G^{\mathrm T}(-\mathrm j\omega_0)G(\mathrm j\omega_0)$为奇异阵。即，$\mathrm j\omega_0$ 是 H 的特征值。 **证毕**

定理 4.3.5 提供了一个近似计算严格正则传函阵 $G(s)$的 H_∞范数的搜索过程。具体算法如下：

令 $a=\bar\sigma[G(\infty)]$，$\varepsilon>0$ 为充分小正数。b 为充分大正数(满足 $\|G(s)\|_\infty<b$)。

Step 1 取 $\gamma=\dfrac{a+b}{2}$。

Step 2 根据定理 4.3.5，检验是否有 $\|\gamma^{-1}G(s)\|_\infty<1$。

若 $\|\gamma^{-1}G(s)\|_\infty<1$，则令 $b=\gamma$。

若 $\|\gamma^{-1}G(s)\|_\infty\geqslant 1$，则令 $a=\gamma$。

Step 3 若 $|a-b|>\varepsilon$，则返回 Step1。

若 $|a-b|\leqslant\varepsilon$，则计算结束，最后得

$$\|G(s)\|_\infty=\gamma\pm\varepsilon$$

对于正则的传函阵 $G(s)\in RL_\infty$，即其状态空间实现为

$$G(s)=[A,B,C,D] \tag{4.3.18}$$

其中 A 为稳定阵，$D\neq 0$，则 $G(s)$的 H_∞范数的计算可按如下定理进行。

【定理 4.3.6】[18] 设 $G(s)$如式(4.3.18)所定义，则存在 $\gamma>0$，使

$$\|G(s)\|_\infty=\|C(sI-A)^{-1}B+D\|_\infty<\gamma$$

的充分必要条件是

$$\gamma^2I-D^TD>0$$

$$\|C_M(sI-A_M)^{-1}B_M\|_\infty<1 \tag{4.3.19}$$

其中

$$A_M=A+B(\gamma^2I-D^TD)^{-1}D^TC$$

$$B_M=B(\gamma^2I-D^TD)^{-\frac{1}{2}}$$

$$C_M=[I+D(\gamma^2I-D^TD)^{-1}D^T]^{\frac{1}{2}}C$$

且 A_M 为稳定阵。

根据定理 4.3.5，不等式(4.3.19)等价于 Hamiltonia 矩阵

$$H_M=\begin{bmatrix}A_M & B_MB_M^T\\ -C_M^TC_M & -A_M^T\end{bmatrix}$$

没有虚轴上的特征值。

4.3.3 Riccati 方程与 H_∞范数

【定理 4.3.7】 设严格正则传函阵 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$，且 A 为稳定阵，则 $\|G(s)\|_\infty<1$的充分必要条件为 Riccati 方程

$$A^TP+PA+PBB^TP+C^TC=0 \tag{4.3.20}$$

有非负定解 $P\geqslant 0$，且 $A+BB^TP$ 为稳定阵。

【证明】 充分性。设 Riccati 方程(4.3.20)存在非负定解 $P\geqslant 0$，且 $A+BB^TP$ 为稳定阵，则由定理 4.3.1、引理 4.3.2 和定理 4.3.5 可推得 $\|G(s)\|_\infty<1$。

必要性。事实上，由已知条件 A 为稳定阵，即 A 没有位于右半平面的不能控和不能观特征值，因此，(A,B)能稳定，(C,A)能检测，由定理 4.3.1，Riccati 方程(4.3.20)存在非负定解 $P=W_{21}W_{11}^{-1}\geqslant 0$，且使 $\mathrm{Re}\,\lambda(A+BB^TP)<0$。 **证毕**

在定理 4.3.7 中，为了得到 Riccati 方程的正定解 $P>0$，需要附加条件(C,A)能观测。我们可将定理 4.3.7 重述如下。

【推论 4.3.1】 设严格正则传函阵 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$，且 A 为稳定阵，则 $\|G(s)\|_\infty<1$的充分必要条件为 Riccati 方程(4.3.20)有非负定解 $P\geqslant 0$，且 $A+BB^TP$ 为稳定阵。

如果还有(C,A)能观测，则 $P>0$。

对于一般的正则有理传函阵

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D,D\neq 0 \tag{4.3.21}$$

则定理 4.3.7 可推广如下。

【定理 4.3.8】 设 $G(s)$由式(4.3.21)给定，$\|D\|_\infty<1$，且 A 为稳定阵，则 $\|G(s)\|_\infty<1$

的充分必要条件为 Riccati 方程

$$P(A + BR^{-1}D^{T}C) + (A + BR^{-1}D^{T}C)^{T}P + PBR^{-1}B^{T}P + C^{T}(I + DR^{-1}D^{T})C = 0 \tag{4.3.22}$$

具有非负定解 $P \geqslant 0$,且 $A + BR^{-1}(B^{T}P + D^{T}C)$为稳定阵。其中 $R = I - D^{T}D > 0$。

4.3.4 Riccati 不等式与 H_∞范数

回顾 4.2 节 H_∞标准控制问题的定义,设计控制器 K,不但使闭环系统传函阵的 H_∞范数满足设计要求,而且使闭环系统内稳定。上小节,仅是传函阵 $G(s)$在 s 闭右半面解析的前提下,给出了 $\| G(s) \|_\infty < 1$ 的充分必要条件。本小节将给出 $\| G(s) \|_\infty < 1$ 且 $G(s)$在 s 闭右半平面解析的充分必要条件。

【定理 4.3.9】 设严格正则有理传函阵 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$,则 A 为稳定阵,且 $\| G(s) \|_\infty < 1$的充分必要条件为存在正定阵 $P > 0$ 满足 Riccati 不等式

$$PA + A^{T}P + PBB^{T}P + C^{T}C < 0 \tag{4.3.23}$$

【证明】 充分性。设存在 $P > 0$ 满足式(4.3.23),令

$$Q = -(PA + A^{T}P + PBB^{T}P + C^{T}C) > 0$$

则

$$PA + A^{T}P = -\widetilde{Q} \tag{4.3.24}$$

其中 $\widetilde{Q} = Q + PBB^{T}P + C^{T}C > 0$,故由式(4.3.24)和 Lyapunov 理论(推论 6.2.1)得 A 为稳定阵。易验证

$$I - G^{T}(-s)G(s) = I + \widetilde{C}(sI - \widetilde{A})^{-1}\widetilde{B} \tag{4.3.25}$$

其中

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -A^{T} & C^{T}C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \widetilde{C} = [B^{T} \quad 0]$$

对式(4.3.25)右端进行相似变换 $\hat{A} = T\widetilde{A}T^{-1}, \hat{B} = T\widetilde{B}, \hat{C} = \widetilde{C}T^{-1}$,其中

$$T = \begin{bmatrix} I & P \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

得

$$I - G^{T}(-s)G(s) = I + \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} \tag{4.3.26}$$

其中

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -A^{T} & A^{T}P + PA + C^{T}C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} PB \\ B \end{bmatrix}, \hat{C} = [B^{T} \quad -B^{T}P]$$

令

$$L^{2} = -(A^{T}P + PA + C^{T}C) = Q + PBB^{T}P$$

由式(4.3.26),经代数运算可推得

$$I - G^{T}(-s)G(s) = N^{T}(-s)N(s) + I - B^{T}PL^{-2}PB, \forall s = j\omega \tag{4.3.27}$$

其中

$$N(s) = L^{-1}PB + L(sI - A)^{-1}B$$

根据矩阵求逆引理(见附录),得

$$I - B^{T}PL^{-2}PB = [I + B^{T}PQ^{-1}PB]^{-1} \tag{4.3.28}$$

由式(4.3.27)和式(4.3.28),得

$$I - G^{T}(-j\omega)G(j\omega) > 0, \forall \omega$$

故

$$\| G(s) \|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)] < 1$$

必要性。设 A 为稳定阵,且 $\| G(s) \|_{\infty} < 1$,则

$$I - B^{T}(-sI - A^{T})^{-1}C^{T}C(sI - A)^{-1}B > 0, \forall s = j\omega$$

因此,存在充分小正数 $\varepsilon > 0$,使得

$$I - B^{T}(-sI - A^{T})^{-1}C_{\varepsilon}^{T}C_{\varepsilon}(sI - A)^{-1}B > 0, \forall s = j\omega$$

其中 $C_{\varepsilon}^{T} = [C^{T} \quad \sqrt{\varepsilon}I]$,上式表明

$$\| C_{\varepsilon}(sI - A)^{-1}B \|_{\infty} < 1$$

因此,由定理 4.3.7 可知,Riccati 方程

$$A^{T}P + PA + PBB^{T}P + C^{T}C + \varepsilon I = 0 \tag{4.3.29}$$

有解。

令 $M = PBB^{T}P + C^{T}C + \varepsilon I > 0, M = C_{M}^{T}C_{M}, C_{M}^{T} = [PB \quad C_{\varepsilon}^{T}]$,则式(4.3.29)可以表示为

$$A^{T}P + PA = -M$$

因为 A 为稳定阵,且可验证(C_{M}, A)能观测,故由 Lyapunov 稳定性理论(定理 6.2.1)得,$P > 0$ 且

$$A^{T}P + PA + PBB^{T}P + C^{T}C = -\varepsilon I < 0$$

证毕

类似于定理 4.3.8,对于一般的正则有理传函阵,上述定理可推广为如下定理。

【定理 4.3.10】 设 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$。$A$ 为稳定阵,且 $\| G(s) \|_{\infty} < 1$ 的充分必要条件为 $\| D \|_{\infty} < 1$,且存在正定阵 $P > 0$,满足 Riccati 不等式

$$P(A + BR^{-1}D^{T}C) + (A + BR^{-1}D^{T}C)^{T}P + PBR^{-1}B^{T}P + C^{T}(I + DR^{-1}D^{T})C < 0 \tag{4.3.30}$$

其中,$R = I - D^{T}D$

关于定理 4.3.9 和定理 4.3.10 中 Riccati 不等式(4.3.23)、(4.3.30)的求解,可将其转化为 Riccati 方程。下面仅就式(4.3.23)的这种转化给出证明,我们有如下定理。

【定理 4.3.11】 存在正定阵 $P > 0$ 满足 Riccati 不等式(4.3.23)的充分必要条件是存在充分小正数 $\varepsilon > 0$,使得 Riccati 方程

$$P_{1}A + A^{T}P_{1} + P_{1}BB^{T}P_{1} + C^{T}C + \varepsilon I = 0 \tag{4.3.31}$$

具有正定解 $P_{1} > 0$。

【证明】 充分性。如果存在 $\varepsilon > 0$,使得式(4.3.31)有正定解 P_{1},则比较式(4.3.31)和式(4.3.23)可知,$P = P_{1} > 0$ 满足 Riccati 不等式(4.3.23)。

必要性。设存在正定阵 $P > 0$,满足 Riccati 不等式(4.3.23),令

$$Q = -(PA + A^{T}P + PBB^{T}P + C^{T}C) > 0 \tag{4.3.32}$$

并且,令 $Z = P^{-1} > 0$,则由式(4.3.32),得

$$Z(C^{T}C + Q)Z + ZA^{T} + AZ + BB^{T} = 0 \tag{4.3.33}$$

由定理 4.3.4,Riccati 方程(4.3.33)的正定解 Z 关于系数阵 $C^{T}C + Q$ 具有单调性,于是可知,对于充分小正数 $\varepsilon(< \lambda_{\min}(Q))$,存在正定阵 $Z_{1} > Z(> 0)$,使得

$$Z_{1}(C^{T}C + \varepsilon I)Z_{1} + Z_{1}A^{T} + AZ_{1} + BB^{T} = 0 \tag{4.3.34}$$

其中，$\lambda_{\min}$表示最小特征值。故 $P_1 = Z_1^{-1} > 0$ 满足式(4.3.31)。 **证毕**

【**定理 4.3.12**】 如果存在 $\varepsilon > 0$，使得 Riccati 方程(4.3.31)有正定解，那么，存在 $\varepsilon_m > 0$，使得方程(4.3.31)对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m]$ 有正定解，且

$$\varepsilon_m = \frac{1}{\|(sI - A)^{-1}BT^{-1}(s)\|_\infty^2} \tag{4.3.35}$$

其中，$T^*(j\omega)T(j\omega) = I - G^*(j\omega)G(j\omega)$。

【**证明**】 设 Riccati 方程(4.3.31)对于给定的 $\varepsilon_0 > 0$ 具有正定解，则由定理 4.3.11 和定理 4.3.9，A 为稳定阵，且

$$\|G(s)\|_\infty < 1$$

所以，同定理 4.3.9 的证明类似，存在充分小的 $\varepsilon > 0$，使得

$$I - B^{\mathrm{T}}(-sI - A^{\mathrm{T}})^{-1}C_\varepsilon^{\mathrm{T}}C_\varepsilon(sI - A)^{-1}B \geqslant 0, \forall s = j\omega \tag{4.3.36}$$

其中，$C_\varepsilon^{\mathrm{T}} = [C^{\mathrm{T}} \quad \sqrt{\varepsilon}I]$。因此，有

$$I - G^*(j\omega)G(j\omega) - \varepsilon B^{\mathrm{T}}(-j\omega I - A^{\mathrm{T}})^{-1}B \geqslant 0, \forall \omega$$

$$I - \varepsilon[T^*j\omega)]^{-1}B^{\mathrm{T}}(-j\omega I - A^{\mathrm{T}})^{-1}(j\omega I - A)^{-1}B[T(j\omega)]^{-1} \geqslant 0, \forall \omega \tag{4.3.37}$$

由最大奇异值的性质，上式成立的充分必要条件是

$$\sup_\omega \bar{\sigma}\{\sqrt{\varepsilon}(j\omega - A)^{-1}BT^{-1}(j\omega)\} \leqslant 1 \tag{4.3.38}$$

或等价地

$$\varepsilon \leqslant \varepsilon_m = \frac{1}{\|(sI - A)^{-1}BT^{-1}(s)\|_\infty^2} \tag{4.3.39}$$

由于 A 稳定且(C_ε, A)能观测，对于满足式(4.3.39)的任意 $\varepsilon > 0$，式(4.3.36)成立，即

$$\|C_\varepsilon(sI - A)^{-1}B\|_\infty < 1$$

由定理 4.3.7(推论 4.3.1)，方程(4.3.31)有正定解。 **证毕**

【**例 4.3.1**】 以如下标量函数说明 H_∞ 范数与 Riccati 方程及不等式间的关系。设

$$G(s) = \frac{b}{s + a} \qquad (a > 0, b > 0)$$

显然，$G(s)$在 s 闭右半平面解析且

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega \left|\frac{b}{j\omega + a}\right| = \frac{b}{a}$$

所以，$\|G(s)\|_\infty < 1$，当且仅当 $a > b$。

记 $A = -a, B = b, C = 1$，则 Riccati 方程(4.3.20)和 Riccati 不等式(4.3.23)分别为

$$R(P) = b^2P^2 - 2aP + 1 = 0 \quad (4.3.40)$$

$$R(P) = b^2P^2 - 2aP + 1 < 0 \quad (4.3.41)$$

实际上，式(4.3.40)有正定解

$$P_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} > 0, P_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} > 0$$

而 Riccati 不等式(4.3.41)的正定解为 $P_2 < P < P_1$，如图 4.3.1 所示。可见，Riccati 方程和不等式分别是标量二次方程和二次不等式到矩阵变量情形的推广。

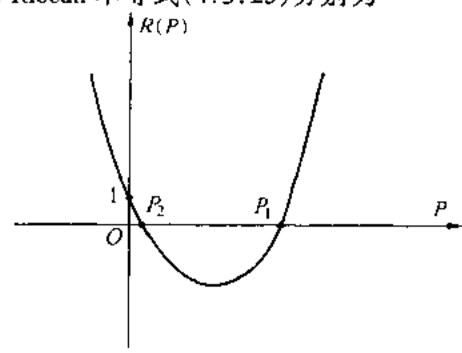


图 4.3.1 Riccati 方程(不等式)的解

4.4 状态反馈 H_∞ 控制

4.4.1 基于 Riccati 不等式的状态反馈解

设广义被控对象的状态空间实现为

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \tag{4.4.1a}$$

$$z = C_1 X + D_{11} w + D_{12} u \tag{4.4.1b}$$

$$y = x \tag{4.4.1c}$$

即

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n, w \in \mathbf{R}^r, z \in \mathbf{R}^m, u \in \mathbf{R}^p, A、B_1、B_2、C_1、D_{11}$ 和 D_{12} 为具有相应维数的常阵。

对上述广义被控对象做如下假设:

(A_1) (A, B_2) 能稳定。

(A_2) $D_{11} = 0, \mathrm{rank}\ D_{12} = p$(列满秩)。

假设(A_1)为系统可镇定的一个必要条件。因为若(A, B_2)不能稳定,那么,就不可能存在使闭环内稳定的反馈控制律 $u = Kx$。因而,H_∞ 控制问题就不可能有解。

假设(A_2)表明,控制目标函数中不显含噪声干扰项。如果条件 $D_{11} = 0$ 不满足,那么,可以通过所谓回路成形(Loop Shaping)技术,将 H_∞ 控制问题等价地表示为对应于某一个满足 $D_{11} = 0$ 的广义被控对象的 H_∞ 标准控制问题[59],或者直接利用文献[41]和[60]给出的基于 Riccati 不等式的解法。也就是说,假设(A_2)只是为了技术处理上简单而引进的,并不影响问题的一般性。

对于系统(4.4.1)和给定的 $\gamma > 0$,所要求解的问题为:

【问题 4.4.1】 设计状态反馈控制律

$$u = Kx, K \in \mathbf{R}^{p \times n} \tag{4.4.2}$$

使得闭环系统内稳定($(A + B_2 K)$稳定)且

$$\| G_{zw}(s) \|_\infty < \gamma \tag{4.4.3}$$

其中 $G_{zw}(s)$ 表示从 w 到 z 的闭环传函阵。

将式(4.4.2)代入系统(4.4.1),并利用假设(A_2),有

$$\dot{x} = (A + B_2 K)x + B_1 w \tag{4.4.4a}$$

$$z = (C_1 + D_{12} K)x \tag{4.4.4b}$$

由此得

$$G_{zw}(s) = \begin{bmatrix} A + B_2 K & B_1 \\ C_1 + D_{12} K & 0 \end{bmatrix}$$

【定理 4.4.1】 设广义被控对象(4.4.1)满足假设(A_1)、(A_2),则问题 4.4.1 有解的充分必要条件为存在正定阵 $P > 0$ 满足 Riccati 不等式

$$A^{\mathrm{T}} P + PA + \gamma^{-2} P B_1 B_1^{\mathrm{T}} P + C_1^{\mathrm{T}} C_1 - (PB_2 + C_1^{\mathrm{T}} D_{12})(D_{12}^{\mathrm{T}} D_{12})^{-1}(B_2^{\mathrm{T}} P + D_{12}^{\mathrm{T}} C_1) < 0 \tag{4.4.5}$$

若不等式(4.4.5)有解 $P>0$,则使闭环系统内稳定,且式(4.4.3)成立的状态反馈阵由下式给出

$$K = -(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}P + D_{12}^{\mathrm{T}}C_1) \tag{4.4.6}$$

【证明】 闭环系统内稳定等价于 $A_K = A + B_2K$ 为稳定阵。由定理 4.3.9 可知,A_K 为稳定阵,且式(4.4.3)成立的充分必要条件为存在 $P>0$,满足

$$PA_K + A_K^{\mathrm{T}}P + \gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P + C_K^{\mathrm{T}}C_K < 0 \tag{4.4.7}$$

整理,得

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + \gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P + C_1^{\mathrm{T}}C_1 - (PB_2 + C_1^{\mathrm{T}}D_{12})(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}P + D_{12}^{\mathrm{T}}G) + M_K^{\mathrm{T}}M_K < 0 \tag{4.4.8}$$

其中

$$M_K = D_{12}[K + (D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}P + D_{12}^{\mathrm{T}}C_1)]$$

必要性。如果存在反馈阵 K,使得 A_K 稳定,且式(4.4.3)成立,则式(4.4.7)有正定解 $P>0$,进而由式(4.4.8)可知,P 满足 Riccati 不等式(4.4.5)。

充分性。如果式(4.4.5)有正定解 $P>0$,令 K 等于式(4.4.6)右端,则式(4.4.8)成立,等价于式(4.4.7)成立。故 A_K 稳定,且式(4.4.3)成立。 **证毕**

假设(A_3) $D_{12}^{\mathrm{T}}[C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$ (正交条件)。

假设(A_3)的正交条件 $D_{12}^{\mathrm{T}}C = 0$ 和 $D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12} = I$,是为使评价信号 $\|z\|^2$ 中不出现 u 和 x 的交叉项,此时

$$\|z\|^2 = x^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}C_1x + u^{\mathrm{T}}u$$

使推导简洁。若不满足正交条件,可用矩阵变换方法将其化为上述形式。详见文献[19]的 3.6 节。

【推论 4.4.1】 在假设(A_1)、(A_2)、(A_3)下,问题 4.4.1 有解的充分必要条件为 Riccati 不等式

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + P(\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - B_2B_2^{\mathrm{T}})P + C_1^{\mathrm{T}}C_1 < 0 \tag{4.4.9}$$

有正定解 $P>0$。若上式有解,则状态反馈阵由下式给出

$$K = -B_2^{\mathrm{T}}P \tag{4.4.10}$$

假设(A_4) $D_{11} = 0, D_{12} = 0$。

$D_{12} = 0$ 为前面所讨论情形的一个特例。此时,为证明状态反馈控制律存在的条件的必要性,需要如下引理。

【引理 4.4.1】 设 $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$为实对称阵,$L \in \mathbf{R}^{r\times n}$为实矩阵且 rank $L = r$。若对于满足 $Lx = 0$ 的任意非零向量 $x \in \mathbf{R}^n$,$x^{\mathrm{T}}Qx < 0$ 成立,则存在正数 $\mu_0 > 0$,使得

$$Q - \mu L^{\mathrm{T}}L < 0 \tag{4.4.11}$$

对所有 $\mu > \mu_0$ 成立。

【证明】 因为 L 行满秩,所以存在非奇异方阵 $T \in \mathbf{R}^{n\times n}$,使得

$$LT = [I \quad 0]$$

对于给定的 $\mu > 0$,$Q - \mu L^{\mathrm{T}}L < 0$ 的充分必要条件为

$$T^{\mathrm{T}}(Q - \mu L^{\mathrm{T}}L)T = \begin{bmatrix} Q_{11} - \mu I & Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.4.12}$$

成立。而任意满足 $Lx = 0$ 的 $x \in \mathbf{R}^n$ 均可表示为

$$x = T\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

其中,$y \in \mathbf{R}^{n-r}$为任意非零向量。故由假设 $x^{\mathrm{T}}Qx<0$,得

$$[0 \quad y^{\mathrm{T}}]T^{\mathrm{T}}QT\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = y^{\mathrm{T}}Q_{22}y < 0, \forall y \in \mathbf{R}^{n-r}$$

即 $Q_{22}<0$。所以,由 Schur 补引理(引理 4.4.3),$T^{\mathrm{T}}(Q-\mu L^{\mathrm{T}}L)T<0$ 成立的充分必要条件为

$$-\mu I + (Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}}) < 0 \tag{4.4.13}$$

令

$$\mu_0 = \lambda_{\max}[Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}}] < 0$$

则对于所有 $\mu>\mu_0$,式(4.4.13)显然成立,即

$$Q - \mu L^{\mathrm{T}}L < 0$$

证毕

【定理 4.4.2】 对式(4.4.1)的广义被控对象,在假设(A_1)、(A_4)下,问题 4.4.1 有解的充分必要条件为存在正数 $\varepsilon>0$,使得 Riccati 不等式

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + P(\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - \varepsilon^{-2}B_2B_2^{\mathrm{T}})P + C_1^{\mathrm{T}}C_1 < 0 \tag{4.4.14}$$

存在正定解 $P>0$。若式(4.4.14)有正定解,则使闭环系统内稳定,且式(4.4.3)成立的状态反馈控制律由下式给出

$$K = -\frac{1}{2\varepsilon^2}B_2^{\mathrm{T}}P \tag{4.4.15}$$

【证明】 在假设(A_1)和(A_4)下,由广义被控对象(4.4.1)和(4.4.2)构成的闭环系统为

$$\dot{x} = (A + B_2K)x + B_1w \tag{4.4.16a}$$

$$z = C_1x \tag{4.4.16b}$$

充分性。设存在 $\varepsilon>0$,使式(4.4.14)有正定解,且 μ 由式(4.4.15)给定。则式(4.4.14)成为

$$P(A + B_2K) + (A + B_2K)^{\mathrm{T}}P + \gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P + C_1^{\mathrm{T}}C_1 < 0$$

故由定理 4.3.9,$A+B_2K$ 为稳定阵,且

$$\|\gamma^{-1}G_{zw}(s)\|_\infty < 1$$

其中 $G_{zw}(s)=C_1(sI-A-B_2K)^{-1}B_1$。所以

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$$

必要性。设存在 K,使得 $A+B_2K$ 稳定,且式(4.4.3)成立。则由定理 4.3.9,存在正定阵 $P_0>0$ 满足

$$P_0(A + B_2K) + (A + B_2K)^{\mathrm{T}}P_0 + \gamma^{-2}P_0B_1B_1^{\mathrm{T}}P_0 + C_1^{\mathrm{T}}C_1 < 0 \tag{4.4.17}$$

令

$$Q = P_0A + A^{\mathrm{T}}P_0 + \gamma^{-2}P_0B_1B_1^{\mathrm{T}}P_0 + C_1^{\mathrm{T}}C_1$$

$$L = B_2^{\mathrm{T}}P_0$$

则由式(4.4.17)可知,对于任意满足 $Lx=B_2^{\mathrm{T}}P_0X=0$ 的非零向量 $X\in\mathbf{R}^n$,$x^{\mathrm{T}}Qx<0$ 成立。根据引理 4.4.1,存在 $\mu_0>0$,使得

$$Q - \mu L^{\mathrm{T}}L < 0, \forall \mu > \mu_0$$

即

$$P_0A + A^{\mathrm{T}}P_0 + P_0(\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - \mu B_2B_2^{\mathrm{T}})P_0 + C_1^{\mathrm{T}}C_1 < 0$$

令 $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$,则 P_0 满足式(4.4.14)。 **证毕**

4.4.2 基于 Riccati 方程的状态反馈解

对于广义被控对象(4.4.1)做如下假设:

(B_1) (A, B_2)能稳定,(C_1, A)能观测。

(B_2) $D_{11} = 0$。

(B_3) $D_{12}^{\mathrm{T}}[C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$。

以上假设条件的解释同上小节。

【定理 4.4.3】 对满足假设条件(B_1)~(B_3)的广义被控对象(4.4.1),问题 4.4.1 有解的充分必要条件为存在矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} > 0$,满足如下 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + (\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - B_2B_2^{\mathrm{T}})P + C_1^{\mathrm{T}}C_1 = 0 \tag{4.4.18}$$

且使闭环系统内稳定的状态反馈阵由下式给出

$$K = -B_2^{\mathrm{T}}P$$

【证明】 充分性。设存在矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ 满足方程(4.4.18),则考虑到假设(B_3)的正交性条件,方程(4.4.18)可改写为

$$(A - B_2B_2^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}P + P(A - B_2B_2^{\mathrm{T}}P) + \gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P + (C_1 - D_{12}B_2^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}(C_1 - D_{12}B_2^{\mathrm{T}}P) = 0$$

将 $K_2 = -B_2P$ 代入上式,得

$$(A + B_2K)^{\mathrm{T}}P + P(A + B_2K) + \gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P + (C_1 + D_{12}K)^{\mathrm{T}}(C_1 + D_{12}K) = 0 \tag{4.4.19}$$

根据定理 4.3.7,如果($A + B_2K$)稳定,则由式(4.4.19)可知

$$\| G_{zw} \|_{\infty} = \| (C_1 + D_{12}K)(sI - A - B_2K)^{-1}B_1 \|_{\infty} < \gamma$$

下证($A + B_2K$)稳定。反证。设方程(4.4.18)的解 $P = P^{\mathrm{T}} > 0$,且 $K = -B_2^{\mathrm{T}}P$,使 $A + B_2K = A - B_2B_2^{\mathrm{T}}P$ 不稳定,即存在 $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$,满足

$$(A + B_2K)x = \lambda x \tag{4.4.20}$$

其中 $x \neq 0$。用 x^* 和 x 分别左乘和右乘方程(4.4.19),得

$$x^*(A + B_2K)^{\mathrm{T}}Px + x^*P(A + B_2K)x = -\gamma^{-2}x^*PB_1B_1^{\mathrm{T}}Px - x^*(C_1 + D_{12}K)^{\mathrm{T}}(C_1 + D_{12}K)x$$

考虑到式(4.4.20),上式成为

$$2\mathrm{Re}\,\lambda x^*Px = -\gamma^{-2}x^*PB_1B_1^{\mathrm{T}}Px - x^*(C_1 + D_{12}K)^{\mathrm{T}}(C_1 + D_{12}K)x$$

上式左端

$$2\mathrm{Re}\,\lambda x^*Px \geqslant 0$$

$$-\gamma^{-2}x^*PB_1B_1^{\mathrm{T}}Px - x^*(C_1 + D_{12}K)^{\mathrm{T}}(C_1 + D_{12}K)x \leqslant 0$$

由此可知,必有

$$-\gamma^{-2}x^*PB_1B_1^{\mathrm{T}}Px - x^*(C_1 + D_{12}K)^{\mathrm{T}}(C_1 + D_{12}K)x = 0$$

即

$$B_1^{\mathrm{T}}Px = 0, (C_1 + D_{12}K)x = 0 \tag{4.4.21}$$

将上式中的第二式左乘 D_{12}^{T}，并利用正交条件(B_3)，则得

$$D_{12}^{\mathrm{T}}(C_1 + D_{12}K)x = Kx = 0$$

再由式(4.4.21)的第二式，得

$$C_1x = 0$$

另一方面，有

$$(A + B_2K)x = Ax = \lambda x$$

故由 $C_1x = 0$ 和 $Ax = \lambda x$ 可知，λ 为(C_1, A)的不能观特征值。这与假设(B_1)的(C_1, A)能观测矛盾，即 $A + B_2K = A - B_2B_2^{\mathrm{T}}P$ 稳定。

必要性。设存在状态反馈阵 K，使 $A + B_2K$ 稳定，且使

$$\| G_{zw} \|_\infty = \| (C_1 + D_{12}K)(sI - A - B_2K)^{-1}B_1 \|_\infty < \gamma$$

则根据定理 4.3.7，必存在 $\widetilde{P} = \widetilde{P}^{\mathrm{T}} > 0$，满足如下 Riccati 方程

$$(A + B_2K)^{\mathrm{T}}\widetilde{P} + \widetilde{P}(A + B_2K) + \gamma^{-2}\widetilde{P}B_1B_1^{\mathrm{T}}\widetilde{P} + (C_1 + D_{12}K)^{\mathrm{T}}(C_1 + D_{12}K) = 0$$

利用假设(B_3)，上式成为

$$A^{\mathrm{T}}\widetilde{P} + \widetilde{P}A + \widetilde{P}(\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - B_2B_2^{\mathrm{T}})\widetilde{P} + C_1^{\mathrm{T}}C_1 + (K + B_2^{\mathrm{T}}\widetilde{P})^{\mathrm{T}}(K + B_2^{\mathrm{T}}\widetilde{P}) = 0$$

因为$(K + B_2^{\mathrm{T}}\widetilde{P})^{\mathrm{T}}(K + B_2^{\mathrm{T}}\widetilde{P}) \geqslant 0$，所以由定理 4.3.3 可知，必存在 $P = P^{\mathrm{T}} \geqslant \widetilde{P} > 0$，满足如下 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - B_2B_2^{\mathrm{T}})P + C_1^{\mathrm{T}}C_1 = 0$$

证毕

注 当 H_∞性能指标 $\gamma \to \infty$ 时，Riccati 方程(4.4.18)退化为一般 LQ 问题中的 Riccati 方程。就是说，这时的 H_∞意义下的最优控制问题就转化为一般线性二次型意义下的最优控制问题。因此，LQ 最优控制可以看做为 H_∞最优控制的一个特例。

假设(B_4)　$D_{11} = 0, D_{12} = 0$。

【定理 4.4.4】 对满足假设(B_1)、(B_4)的广义被控系统(4.4.1)，问题 4.4.1 有解的充分必要条件为存在矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} > 0$，满足如下 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - \varepsilon^{-1}B_2B_2^{\mathrm{T}})P + C_1^{\mathrm{T}}C_1 = 0 \tag{4.4.22}$$

相应的使$(A + B_2K)$稳定的状态反馈阵为

$$K = -\frac{1}{2\varepsilon}B_2^{\mathrm{T}}P$$

假设(B_5)　(A, B_2)能稳定，(C_1, A)能检测。

【定理 4.4.5】 对于满足假设(B_2)、(B_3)、(B_5)的广义被控系统(4.4.1)，问题 4.4.1 有解的充分必要条件为 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - B_2B_2^{\mathrm{T}})P + C_1^{\mathrm{T}}C_1 = 0 \tag{4.4.23}$$

存在解矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} \geqslant 0$，且$(A + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}P - B_2B_2^{\mathrm{T}}P)$稳定。相应的使$(A + B_2K)$稳定的状态反馈阵由下式给出

$$K = -B_2^{\mathrm{T}}P$$

【例 4.4.1】 设二维线性系统为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u,\ y=x$$

$$z=\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\ 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

要求设计状态反馈控制律 $\boldsymbol{K}$,使闭环内稳定,且使传函 $G_{zw}(s)$满足 $\|G_{zw}\|_\infty<2$。

【解】 易验证,该系统满足假设$(B_1)\sim(B_3)$,根据定理 4.4.3,$\boldsymbol{K}$ 使闭环内稳定,且使 $\|G_{zw}\|_\infty<2$的充分必要条件为 Riccati 方程(4.4.18)存在解 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0}$。由 Matlab 可解得

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.307\,0 & 5.978\,7\\ 5.978\,7 & 14.346\,4\end{bmatrix}$$

相应的状态反馈控制律为

$$u=\boldsymbol{K}x=-\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}x=[-4.307\,0\quad -5.978\,7]x$$

4.4.3 状态反馈的一般解

设广义被控对象 G 的状态空间实现为

$$\dot{x}=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}_1w+\boldsymbol{B}_2u \tag{4.4.24a}$$

$$z=\boldsymbol{C}_1x+\boldsymbol{D}_{11}w+\boldsymbol{D}_{12}u \tag{4.4.24b}$$

$$y=x \tag{4.4.24c}$$

即

$$G(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

我们不对 $\boldsymbol{D}_{11}$和 $\boldsymbol{D}_{12}$附加任何条件,也就是说,我们将在较一般的意义下,求解状态反馈解。

下面采用矩阵的满秩分解技术,求解式(4.4.24)的状态反馈解。

令

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{D}_{12})=i(\leqslant m)>0$$

$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是满足下式的任意矩阵

$$\boldsymbol{D}_{12}=\boldsymbol{U\Sigma},\ \boldsymbol{U}\in\mathbf{R}^{m\times i},\ \boldsymbol{\Sigma}\in\mathbf{R}^{i\times p}$$

$$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{U}=\mathrm{rank}\ \boldsymbol{\Sigma}=i$$

选择矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_F\in\mathbf{R}^{(p-i)\times p}$,使其满足

$$\boldsymbol{\Phi}_F\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\Phi}_F\boldsymbol{\Phi}_F^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$$

当 $i=p$ 时,即 $\boldsymbol{D}_{12}$为列满秩时,则 $\boldsymbol{\Phi}_F=\boldsymbol{0}$。定义

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}_{11}(\gamma^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{11})^{-1}\boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}}\qquad(\boldsymbol{D}_{11}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I})$$

$$\boldsymbol{H}_F=\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Sigma\Sigma}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{RU})^{-1}(\boldsymbol{\Sigma\Sigma}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}$$

显然,$\boldsymbol{D}_{12}=\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{\Phi}_F=\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{H}_F=\boldsymbol{0}$。

定义
$$
\begin{aligned}
A_F &= A + B_1(\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1} D_{11}^T C_1 \\
B_F &= B_2 + B_1(\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1} D_{11}^T D_{12} \\
C_F &= [I + D_{11}(\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1} D_{11}^T]^{\frac{1}{2}} C_1 \\
D_F &= B_1(\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-\frac{1}{2}} \\
F_F &= [I + D_{11}(\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1} D_{11}^T]^{\frac{1}{2}} D_{12}
\end{aligned}
\tag{4.4.25}
$$

【定理 4.4.6】 对于满足(A_1)的系统(4.4.24),使得存在状态反馈阵 K,满足 $A + B_2K$ 稳定,且

$$\| G_{zw}(s) \|_\infty < \gamma$$

其中

$$G_{zw}(s) = (C_1 + D_{12}^T K)(sI - A - B_2K)^{-1} B_1 + D_{11}$$

成立的充分必要条件是

(1) $D_{11}^T D_{11} < \gamma^2 I$。

(2) 存在常数 $\varepsilon > 0$ 和正定阵 Q,使得 Riccati 方程

$$
\begin{aligned}
&(A_F - B_F H_F F_F^T C_F)^T P + P(A_F - B_F H_F F_F^T C_F) + PD_F D_F^T P - PB_F H_F B_F^T P \\
&- \frac{1}{\varepsilon} PB_F \boldsymbol{\Phi}_F^T \boldsymbol{\Phi}_F B_F^T P + C_F^T(I - F_F H_F F_F^T) C_F + Q = 0
\end{aligned}
\tag{4.4.26}
$$

存在正定解 $P > 0$。若上述条件成立,则所求解的状态反馈阵为

$$K = -\left(\frac{1}{2\varepsilon} \boldsymbol{\Phi}_F^T \boldsymbol{\Phi}_F + H_F\right) B_F^T P - H_F F_F^T C_F \tag{4.4.27}$$

【证明】 令

$$A_K = A + B_2 K, C_K = C_1 + D_{12} K$$

则

$$G_{zw}(s) = C_K(sI - A_K)^{-1} B_1 + D_{11}$$

充分性。设条件(1)和(2)成立,且反馈阵 K 由式(4.4.27)给定,则 $\varepsilon > 0$ 和 $Q > 0$ 使式(4.4.26)具有正定解 $P > 0$。利用等式

$$H_F F_F^T F_F H_F = H_F$$

由式(4.4.26),经整理,得

$$A_K^T P + PA_K + (PB_1 + C_K^T D_{11})(\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1}(B_1^T P + D_{11}^T C_K) + C_K^T C_K + Q = 0$$

注意到 $Q > 0$,由定理 4.3.10,A_K 稳定,且 $\| G_{zw}(s) \|_\infty < \gamma$。

必要性。条件(1)的必要性显然。

设存在 K,使 A_K 稳定且 $\| G_{zw}(s) \|_\infty < \gamma$,则由定理 4.3.10 和定理 4.3.11,存在正定阵 $Q_1(= \varepsilon I)$和 $P > 0$,使得

$$A_K^T P + PA_K + (PB_1 + C_K^T D_{11})(\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1}(B_1^T P + D_{11}^T C_K) + C_K^T C_K + Q_1 = 0$$

从而有

$$A_K^T P + PA_K + PD_F D_F^T P + K^T(F_F^T C_F + B_F^T P) + (F_F^T C_F + B_F^T P)^T K + K^T F_F^T F_F K + C_F^T C_F + Q_1 = 0$$

定义 $T = [\boldsymbol{\Sigma}^T \quad \boldsymbol{\Phi}_F^T] \in \mathbf{R}^{p \times p}$(若 $i = p$,则 $T = \boldsymbol{\Sigma}^T$)。因为 $\boldsymbol{\Sigma}^T$ 为列满秩,而 $\boldsymbol{\Phi}_F^T$ 与 $\boldsymbol{\Sigma}^T$ 直交($\boldsymbol{\Phi}_F \boldsymbol{\Sigma}^T = 0$),且 $\boldsymbol{\Phi}_F \boldsymbol{\Phi}_F^T = I$,知 T 为非奇异矩阵。令

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = T^{-1} K$$

则有

$$K^{\mathrm{T}}F_F^{\mathrm{T}}F_FK + K^{\mathrm{T}}(F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P) + (F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}K =$$

$$L_1^{\mathrm{T}}\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}RU\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}L_1 + L_1^{\mathrm{T}}\Sigma(F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P) + (F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}\Sigma^{\mathrm{T}}L_1 + L_2^{\mathrm{T}}\Phi_FB_F^{\mathrm{T}}P +$$

$$PB_F\Phi_F^{\mathrm{T}}L_2 = W^{\mathrm{T}}W - (F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}H_F(F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P) + L_2^{\mathrm{T}}\Phi_FB_F^{\mathrm{T}}P + PB_F\Phi_F^{\mathrm{T}}L_2$$

其中

$$W = (U^{\mathrm{T}}RU)^{\frac{1}{2}}(\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}})L_1 + (U^{\mathrm{T}}RU)^{-\frac{1}{2}}(\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}})^{-1}\Sigma(F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P)$$

因此

$$A_F^{\mathrm{T}}P + PA_F + PD_FD_F^{\mathrm{T}}P + C_F^{\mathrm{T}}C_F + Q_1 + W^{\mathrm{T}}W - (F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}H_F(F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P) +$$

$$L_2^{\mathrm{T}}\Phi_FB_F^{\mathrm{T}}P + PB_F\Phi_F^{\mathrm{T}}L_2 = 0$$

对于所有使得 $\Phi_FB_F^{\mathrm{T}}Px = 0$ 的非零向量 x,下式成立

$$x^{\mathrm{T}}[A_F^{\mathrm{T}}P + PA_F + PD_FD_F^{\mathrm{T}}P + C_F^{\mathrm{T}}C_F - (F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}H_F(F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P)]x \leqslant -x^{\mathrm{T}}Q_1x < 0$$

由引理 4.4.1 可知,存在 $\varepsilon > 0$,使如下矩阵不等式成立

$$A_F^{\mathrm{T}}P + PA_F + PD_FD_F^{\mathrm{T}}P + C_F^{\mathrm{T}}C_F - (F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}H_F(F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P) - \frac{1}{\varepsilon}PB_F\Phi_F^{\mathrm{T}}\Phi_FB_F^{\mathrm{T}}P < 0$$

定义矩阵 Q 为

$$-Q = A_F^{\mathrm{T}}P + PA_F + PD_FD_F^{\mathrm{T}}P + C_F^{\mathrm{T}}C_F - (F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}H_F(F_F^{\mathrm{T}}C_F + B_F^{\mathrm{T}}P) - \frac{1}{\varepsilon}PB_F\Phi_F^{\mathrm{T}}\Phi_FB_F^{\mathrm{T}}P$$

则 $Q > 0$。从而条件(2)成立。 证毕

值得注意的是在定理 4.4.6 中,若附加条件(A_2)、(A_3),则可得推论 4.4.1。事实上,在假设(A_2)、(A_3)下,$R = I$,D_{12}列满秩。因此,$\Phi_F = 0$,且 Σ 非奇异,故 $H_F = I$。进而由 $D_{12}^{\mathrm{T}}C_1 = 0$,可得 $C_F^{\mathrm{T}}F_F = 0$。

若再附加条件(A_4),则可得定理 4.4.2。

我们看到,前面两小节所得到的状态反馈解,均可由本小节的定理 4.4.6 推出。因此,我们称本小节所得的状态反馈解为状态反馈一般解。

4.4.4 状态反馈的完全解

设广义被控对象 G 的状态空间实现取如下的特殊形式

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{4.4.28}$$

此时,$y = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$,即广义被控对象的状态 x 和外部干扰输入 w 均能量测到(完全可检测),均能直接用于控制律的设计。式(4.4.28)结构的广义对象对应的 H_∞ 控制问题,也称为全信息(Full Information)问题,相应的状态反馈解称为完全解。

设式(4.4.28)的 G 满足如下假设条件:

(C_1) (A, B_2)能稳定。

(C_2) $D_{12}^{\mathrm{T}}[C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$。

(C_3)　$D_{11}=0$。

(C_4)　$G_{12}(s)$在虚轴上无零点。

(C_1)是镇定系统所必需的，(C_2)和(C_3)如前所述，则是为了推导简便。(C_4)则是本节所述方法的必要条件。

对广义被控对象(4.4.28)，我们的目的是求对应的 H_∞ 标准控制问题可解的充分必要条件，并求使闭环系统内稳定且 $\|G_{zw}(s)\|_\infty<1$ 的所有反馈控制器

$$u = K(s)y = K_x(s)x + K_w(s)w \quad (4.4.29)$$

其中 $K(s)=[K_x(s)\quad K_w(s)]$。

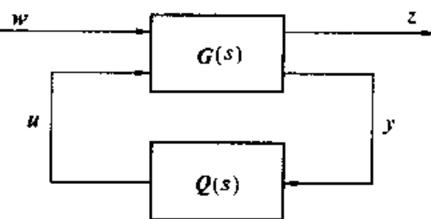


图 4.4.1　内稳定性

显然，控制器(4.4.29)为动态控制器，且包括状态反馈和干扰前馈两个部分。严格地说，控制器(4.4.29)已经是动态输出反馈控制器。为推导控制器(4.4.29)，先介绍如下引理。

【引理 4.4.2】　考虑图 4.4.1 所示反馈系统。其中

$$G(s)=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \in RH_\infty$$

若 $G^T(-s)G(s)=I$，$G_{21}^{-1}(s)\in RH_\infty$，则该系统内稳定且 $\|G_{zw}(s)\|_\infty<1$ 的充分必要条件是 $Q(s)\in RH_\infty$，且满足 $\|Q(s)\|_\infty<1$。

该引理的证明可参见文献[42]的引理 15 或文献[17]的引理 6.4.6。

【引理 4.4.7】　设广义被控对象(4.4.28)满足假设$(C_1)\sim(C_4)$。如果 Riccati 方程

$$PA + A^TP + P(B_1B_1^T - B_2B_2^T)P + C_1^TC_1 = 0 \tag{4.4.30}$$

有解 $P\geqslant 0$，使得 $A+(B_1B_1^T-B_2B_2^T)P$ 是稳定阵，则 H_∞ 标准控制问题有解，并且所有解由下式给出

$$K(s)=[-Q(s)F_1+F_2\quad Q(s)] \tag{4.4.31}$$

其中，$F_1=B_1^TP$，$F_2=-B_2^TP$，而 $Q(s)$是在 s 闭右半平面解析且 $\|Q(s)\|_\infty<1$ 的任意有理函数阵，即 $Q(s)=RH_\infty$。

【证明】　设 Riccati 方程(4.4.30)存在半正定解 $P\geqslant 0$，使得 $A+(B_1B_1^T-B_2B_2^T)P$ 是稳定阵。以下证明使闭环系统内稳定且 $\|G_{zw}(s)\|_\infty<1$ 的控制器由式(4.4.31)给定。

令 $K(s)$由式(4.4.31)给定，则闭环系统为

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \tag{4.4.32a}$$

$$z = C_1x + D_{12}u \tag{4.4.32b}$$

$$u = (-Q(s)F_1 + F_2)x + Q(s)w \tag{4.4.32c}$$

定义辅助信号

$$v = u - F_2x \tag{4.4.33}$$

则闭环系统(4.4.32)可以表示为

$$\dot{x} = A_Fx + B_1w + B_2v \tag{4.4.34a}$$

$$z = C_Fx + D_{12}v \tag{4.4.34b}$$

$$v = -Q(s)F_1x + Q(s)w \tag{4.4.34c}$$

其中 $A_F = A + B_2F_2$，$C_F = C_1 + D_{12}F_2$。

令

$$\tilde{y} = [-F_1 \quad I]y = -F_1x + w \tag{4.4.35}$$

则闭环系统(4.4.34)可以表示为图 4.4.2 所示结构。其中，等价的广义被控对象 $\hat{G}(s)$ 由下式给定。

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} A_F & B_1 & B_1 \\ C_F & 0 & D_{12} \\ -F_1 & I & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.36}$$

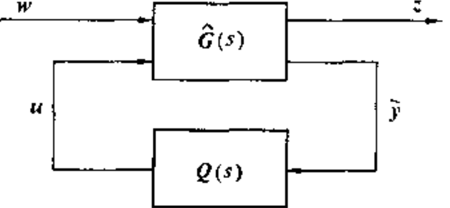


图 4.4.2 等价闭环系统

所以，由引理 4.4.2 可知，如果

(1) A_F 是稳定阵。

(2) $\hat{G}^T(-s)\hat{G}(s) = I$。

(3) $\hat{G}_{21}^{-1}(s) = [I - F_1(sI - A_F)^{-1}B_1]^{-1} \in RH_\infty$。

则，对于任意 $Q(s) \in RH_\infty$($\|Q(s)\|_\infty < 1$)，图 4.4.2 所示系统内稳定，且 $\|G_{zw}(s)\|_\infty < 1$，定理得证。

因此，以下只需证明(1)～(3)成立。

(1) Riccati 方程(4.4.30)可以表示为

$$PA_F + A_F^TP = -\hat{C}_F^T\hat{C}_F \tag{4.4.37}$$

其中

$$\hat{C}_F = \begin{bmatrix} C_F \\ -F_1 \end{bmatrix}$$

因为 $A_F + [0 \quad -B_1]\hat{C}_F = A - B_2B_2^TP + B_1B_1^TP$ 是稳定阵，所以($\hat{C}_F, A_F$)是能检测的。故由 Lyapunov 方程(4.4.37)和 6.2 节的定理 6.2.2 可知，A_F 为稳定阵。

(2) 令

$$\hat{B} = [B_1 \quad B_2], \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & D_{12} \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} A_F & \hat{B} \\ \hat{C}_F & \hat{D} \end{bmatrix}$$

不难验证，$\hat{D}^T\hat{D} = I$ 且 $\hat{D}^T\hat{C}_F + \hat{B}^TP = 0$。再考虑到式(4.4.37)，则由文献[19]的引理 2.6.1，得 $\hat{G}^T(-s)\hat{G}(s) = I$。

(3) 因为 $\hat{G}_{21}^{-1}(s) = [A_F, B_1, -F_1, I]^{-1} = [A_F + B_1F_1, B_1, F_1, I]$，而

$$A_F + B_1F_1 = A - B_2B_2^TP + B_1B_1^TP$$

是稳定的，故 $\hat{G}_{21}^{-1}(s) \in RH_\infty$。

最后，证明所有满足 $\|G_{zw}(s)\|_\infty < 1$ 的控制器均可表示为式(4.4.31)的形式。设 $K(s)$ 使闭环系统内稳定，且 $\|G_{zw}(s)\|_\infty < 1$，则 $G_{zw}(s) \in RH_\infty$。由图 4.4.2 可知

$$G_{zw}(s) = \hat{G}_{11}(s) + \hat{G}_{12}(s)G_{vw}(s) \tag{4.4.38}$$

其中 $G_{vw}(s)$表示从 w 到 v 的闭环传函阵。令

$$Q(s) = [I + G_{vw}(s)\hat{G}_{21}^{-1}(s)\hat{G}_{22}(s)]^{-1}G_{vw}(s)\hat{G}_{21}^{-1}(s) \tag{4.4.39}$$

则

$$G_{vw}(s) = Q(s)[I - \hat{G}_{22}(s)Q(s)]^{-1}\hat{G}_{21}(s) \tag{4.4.40}$$

将式(4.4.40)代入式(4.4.38),得

$$G_{zw}(s) = \hat{G}_{11}(s) + \hat{G}_{12}(s)Q(s)[I - \hat{G}_{22}(s)Q(s)]^{-1}\hat{G}_{21}(s) = \mathrm{LFT}(\hat{G}(s), Q(s))$$

由定理前一部分的证明可知,(1)~(3)成立,故由引理 4.4.2,式(4.4.39)给出的 $Q(s) \in RH_\infty$,且 $\| Q(s) \|_\infty \leqslant 1$。

由式(4.4.40)和式(4.4.33)可知

$$u = F_2x + v = F_2x + G_{vw}(s)w = F_2x + Q(s)(-F_1x + w) = [-Q(s)F_1 + F_2 \quad Q(s)]\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

证毕

在控制器集合(4.4.31)中,如果取 $Q(s) = 0$,则 $K(s) = [F_2 \quad 0]$,即控制器中包含状态反馈项而不含干扰前馈项。我们有

$$u = F_2x = -B_2^{\mathrm{T}}Px \tag{4.4.41}$$

定理 4.4.7 表明,广义对象(4.4.28)的 H_∞ 标准控制问题解存在的一个充分条件是Riccati方程(4.4.30)具有半正定解 $P \geqslant 0$。实际上,这一条件也是必要的。必要性的证明是 H_∞ 控制理论中推导最为繁琐的部分。比较完整的证明方法是由文献[42]给出的基于Hankel – Toeplitz算子理论的方法。有关这一方法的详细讨论,可参阅文献[17]、[42]。必要性的证明也可以直接从传递函数入手,详见文献[19]。

4.4.5 基于 LMI 的状态反馈解

Riccati 不等式(方程)的求解往往依赖于参数的调整,并且无法对性能指标 γ 进行优化。而线性矩阵不等式(LMI)方法可以克服 Riccati 方法的上述缺点。近年来,LMI 方法广泛应用于鲁棒 H_∞ 控制问题的求解,大有取代 Riccati 方法之势。Matlab 已开发出 LMI 求解工具箱,为控制系统仿真与设计提供了极大的方便。Riccati 不等式为二次矩阵不等式,将二次矩阵不等式转换为线性矩阵不等式,Schur 补引理起着决定性的作用。因此,我们将首先介绍 Schur 补引理并给出证明。需要注意的是并不是所有的二次矩阵不等式都能转换为线性矩阵不等式。

【引理 4.4.3】(Schur 补引理) 对于任意分块 Hermitian 矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{4.4.42}$$

$Q > 0$ 当且仅当

$$\begin{cases} Q_{22} > 0 & (4.4.43\text{a}) \\ Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^* > 0 & (4.4.43\text{b}) \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} Q_{11} > 0 & (4.4.44\text{a}) \\ Q_{22} - Q_{12}^*Q_{11}^{-1}Q_{12} > 0 & (4.4.44\text{b}) \end{cases}$$

【证明】 必要性。设 $Q > 0$。我们仅证明式(4.4.43)。显然 $Q_{22} > 0$ 是必要的。根据 Q

的分块,将向量 x 分块为

$$x = [x_1^* \quad x_2^*]^*$$

我们有

$$x^* Qx = x_1^* Q_{11} x_1 + 2x_1^* Q_{12} x_2 + x_2^* Q_{22} x_2 \tag{4.4.45}$$

令 x_2 满足方程 $Q_{22}x_2 = 0$。如果 $Q_{12}x_2 \neq 0$,令 $x_1 = -\alpha Q_{12} x$,$\alpha > 0$,则

$$x^* Qx = \alpha^2 x_2^* Q_{12}^* Q_{11} Q_{12} x_2 - 2\alpha x_2^* Q_{12}^* Q_{12} x_2$$

上式对充分小的 $\alpha > 0$ 是负定的。所以,对所有满足 $Q_{22}x_2 = 0$ 的 x_2,必有 $Q_{12}x_2 = 0$。这意味着 Q_{12}的诸行必是 Q_{22}诸行的线性组合,即

$$Q_{12} = LQ_{22} \tag{4.4.46}$$

对某矩阵 L(非惟一)成立。

由于 $Q_{22} > 0$,对任意 x_1,式(4.4.45)式的二次型关于 x_2 有极小点。于是,式(4.4.45)对 x_2 求偏导数,我们有

$$0 = \frac{\partial(x^* Qx)}{\partial x_2^*} = 2Q_{12}^* x_1 + 2Q_{22} x_2 = 2Q_{22} L^* x_1 + 2Q_{22} x_2$$

解得

$$Q_{22} L^* x_1 = -Q_{22} x_2 \tag{4.4.47}$$

将式(4.4.46)和式(4.4.47)代入式(4.4.45),我们得到对任意 x_1,二次型 $x^* Qx$ 关于 x_2 的极小值为

$$\min_{x_2} x^* Qx = x_1^* (Q_{11} - LQ_{22} L^*) x_1 = x_1^* (Q_{11} - Q_{12} - Q_{22}^{-1} Q_{12}^*) x_1$$

因此,式(4.4.43b)是必要的。

充分性。条件(4.4.43)隐含对任意 x_1,二次型 $x^* Qx$ 关于 x_2 的极小值是正定的,所以条件(4.4.43)也是充分的。　　**证毕**

下面的定理给出了基于 LMI 的状态反馈 H_∞ 控制问题的解。

【定理 4.4.8】 对于满足假设(B_1)~(B_3)的线性定常广义系统(4.4.1)和给定的正数 $\gamma > 0$,存在状态反馈阵 K,使式(4.4.3)的性能指标成立的充分必要条件是存在正定对称阵 P_1 和矩阵 P_2,使得下式成立

$$\begin{bmatrix} AP_1 + P_1 A^T + B_2 P_2 + P_2 B_2^T + \gamma^{-2} B_1 B_1^T & (C_1 P_1 + D_{12} P_2)^T \\ C_1 P_1 + D_{12} P_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.4.48}$$

相应的系统(4.4.1)的镇定控制律为

$$u = Kx = P_2 P_1^{-1} x \tag{4.4.49}$$

注意到,矩阵不等式(4.4.48)线性(仿射)依赖于未知矩阵变量 P_1、P_2,故称其为线性矩阵不等式。

【证明】 充分性。由 Schur 补引理,线性矩阵不等式(4.4.48)等价于如下二次矩阵不等式

$$AP_1 + P_1 A^T + B_2 P_2 + P_2 B_2^T + \gamma^{-2} B_1 B_1^T + (C_1 P_1 + D_{12} P_2)^T (C_1 P_1 + D_{12} P_2) < 0 \tag{4.4.50}$$

假设存在正定对称阵 P_1 和矩阵 P_2 满足矩阵不等式(4.4.48),也即满足不等式(4.4.50)。令

$$K = P_2 P_1^{-1}$$

则可将不等式(4.4.50)改写为

$$(A + B_2K)P_1 + P_1(A + B_2K)^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} + P_1(C_1 + D_{12}K)^{\mathrm{T}}(C_1 + D_{12}K)P_1 < 0 \tag{4.4.51}$$

取 $P = P_1^{-1} > 0$,并将式(4.4.51)两边分别左乘和右乘矩阵 P,则有

$$(A + B_2K)^{\mathrm{T}}P + P(A + B_2K) + \gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P + (C_1 + D_{12}K)^{\mathrm{T}}(C_1 + D_{12}K) < 0 \tag{4.4.52}$$

因此,根据定理4.3.9,可得

$$\| G_{zw}(s) \|_{\infty} < \gamma$$

且$(A + B_2K)$为稳定阵。充分性得证。

必要性。假设存在状态反馈阵 K,使矩阵$(A + B_2K)$稳定,且式(4.4.3)的性能指标成立。令 $P_1 = P^{-1} > 0$,则由式(4.4.52)可得式(4.4.51)。再令 $P_2 = KP_1$,则由式(4.4.51)可得式(4.4.50),且式(4.4.50)与式(4.4.48)等价。必要性得证。 **证毕**

将线性矩阵不等式(4.4.48)各分块元素同时乘以 $\gamma > 0$,并记 $\overline{P}_1 = \gamma^2 P_1$,$\overline{P}_2 = \gamma^2 P_2$,则得

$$\begin{bmatrix} A\overline{P}_1 + \overline{P}_1A^{\mathrm{T}} + B_2\overline{P}_2 + \overline{P}_2B_2^{\mathrm{T}} + B_1B_1^{\mathrm{T}} & (C_1\overline{P}_1 + D_{12}\overline{P}_2)^{\mathrm{T}} \\ C_1\overline{P}_1 + D_{12}\overline{P}_2 & -\gamma^{-2}I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.4.53}$$

式(4.4.53)仍为线性矩阵不等式。我们注意到,线性矩阵不等式(4.4.48)或(4.4.53)是利用Schur补引理,由二次矩阵不等式(Riccati不等式)得到的。可见Schur补引理在这种转换中的重要作用。

根据定理4.4.8,状态反馈 H_{∞} 控制问题,可以转化为式(4.4.48)或式(4.4.53)的线性矩阵不等式的优化问题

$$\begin{cases} \min \ \gamma \\ \text{s.t.} \begin{cases} \text{式(4.4.48)或式(4.4.53)成立} \\ P_1 > 0 \text{ 或 } \overline{P}_1 > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{4.4.54}$$

其中式(4.4.48)或式(4.4.53)右端矩阵是优化变量 P_1、P_2 和正数 γ^2 的线性(仿射)函数。也就是式(4.4.48)或式(4.4.53)的不等式约束为线性矩阵不等式约束。

如果我们以

$$F(x) < 0 \tag{4.4.55}$$

表示一般的线性矩阵不等式约束,其中 x 为优化变量,$F(x)$为 x 的线性(仿射)矩阵函数,则可以证明线性矩阵不等式约束(4.4.55)为凸约束。事实上,如果有 $F(x_1) < 0$ 和 $F(x_2) < 0$,则对于任意 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,显然有

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) < 0$$

成立。因此,优化问题(4.4.54)实质上是线性目标函数在凸约束下的优化问题,即是一种典型的凸优化问题。

式(4.4.54)给出的优化问题,可以利用Matlab中的LMI工具箱求解。

关于线性矩阵不等式,线性矩阵不等式的转化、判别、优化和求解等问题,可参阅文献[18]12.5节,或直接参阅文献[61]。

4.5 输出反馈 H_∞ 控制

4.5.1 输出反馈设计特例

状态反馈控制器设计，一般是采用静态控制器设计方法，即设计定常反馈增益阵 K，即可使得闭环系统内稳定，且满足 H_∞ 性能指标。与此不同，输出反馈控制器设计一般是采用动态控制器设计方法，以期达到所提出的设计性能目标。与静态控制器相比，动态控制器在结构上要复杂得多。我们首先考虑输出反馈控制器设计的一种较简单的特殊情况。设广义被控对象(4.2.1)满足如下假设条件：

(D_1)　(A_1, B_1) 能稳定，(C_2, A) 能检测。

(D_2)　$D_{21}[D_{21}^T \quad B_1^T] = [I \quad 0]$（正交条件）。

(D_3)　$G_{21}(s)$ 在虚轴上无零点。

除以上一般性的假设条件之外，本小节我们进一步假设系统(4.2.1)满足如下两个特定条件：

(D_4)　$D_{12} = I$。

(D_5)　$A - B_2 C_1$ 是稳定阵。

即广义对象的状态空间实现为

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & I \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5.1}$$

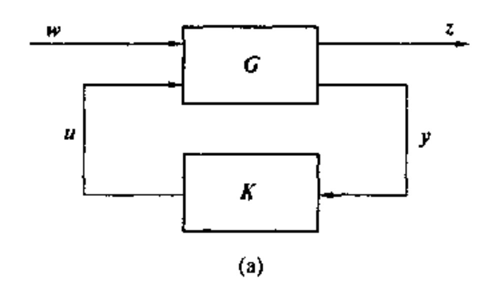
对于上述形式的广义被控对象，我们来解 H_∞ 标准控制问题。即求使得图 4.2.1 所示闭环系统内稳定，且 $\| G_{zw}(s) \|_\infty < 1$ 的输出反馈控制器

$$u = K(s)y \tag{4.5.2}$$

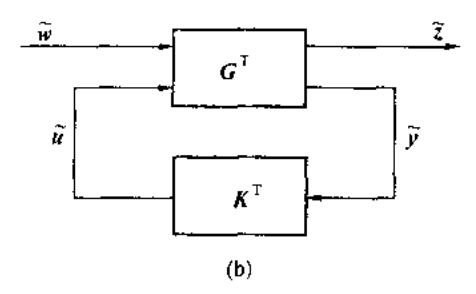
存在的充分必要条件，并设计相应的动态控制器 $K(s)$。

为了下述定理必要性的推导，先给出如下引理。

【引理 4.5.1】　考虑图 4.5.1 所示系统。对于给定的 $G(s)$，反馈控制器 $K(s)$ 使图 4.5.1(a)所示系统内稳定且 $\| G_{zw}(s) \|_\infty < 1$ 成立的充分必要条件是图 4.5.1(b)所示的对偶系统内稳定且 $\| G_{\tilde{z}\tilde{w}} \|_\infty < 1$。



(a)



(b)

图 4.5.1　对偶系统

该引理的证明，读者可作为练习，自行证明。

【定理 4.5.1】　设广义被控对象(4.2.1)满足假设条件(D_1)～(D_5)，则存在动态反馈控制

器(4.5.2),使得图 4.2.1 所示闭环系统内稳定且 $\|G_{zw}(s)\|_\infty<1$ 成立的充分必要条件是 Riccati 方程

$$AY + YA^{\mathrm{T}} + Y(C_1^{\mathrm{T}}C_1 - C_2^{\mathrm{T}}C_2)Y + B_1B_1^{\mathrm{T}} = 0 \tag{4.5.3}$$

具有半正定解 $Y\geqslant 0$,使得 $A^{\mathrm{T}}+(C_1^{\mathrm{T}}C_1-C_2^{\mathrm{T}}C_2)Y$ 是稳定阵。如果存在这样的 Y,则 H_∞ 标准控制问题的解为

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - B_2C_1 - LC_2 & -L \\ \hline C_1 & 0 \end{array}\right] \tag{4.5.4}$$

其中 $L=YC_2^{\mathrm{T}}$。

【证明】 充分性。设 Riccati 方程(4.5.3)有解 $Y\geqslant 0$,并令控制器 $K(s)$ 由式(4.5.4)给定。即控制器的状态空间实现为

$$\dot{x}_c = (A - B_2C_1 - LC_2)x_c - Ly \tag{4.5.5a}$$

$$u = C_1x_c \tag{4.5.5b}$$

而广义被控对象的状态空间实现为

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \tag{4.5.6a}$$

$$z = C_1x + u \tag{4.5.6b}$$

$$y = C_2x + D_{21}w \tag{4.5.6c}$$

由式(4.5.5)和式(4.5.6)可得增广闭环系统的状态空间表示

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_2C_1 \\ -LC_2 & A-B_2C_1-LC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ -LD_{21} \end{bmatrix}w$$

$$z = [C_1 \quad C_1]\begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

对上式进行如下非奇异变换

$$\begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \tag{4.5.7}$$

则得

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-B_2C_1 & B_2C_1 \\ 0 & A-LC_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1-LD_{21} \end{bmatrix}w \tag{4.5.8a}$$

$$z = [0 \quad C_1]\begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix} \tag{4.5.8b}$$

将 Riccati 方程(4.5.3)改写为

$$(A - LC_2)Y + Y(A - LC_2)^{\mathrm{T}} + B_YB_Y^{\mathrm{T}} = 0 \tag{4.5.9}$$

其中 $B_Y=[YC_1^{\mathrm{T}} \quad L \quad B_1]$。根据假设($D_1$)可知,$(A-LC_2, B_Y)$ 能稳定。故由式(4.5.9)和 Lyapunov定理(推论 6.2.3),$A-LC_2$ 是稳定阵。再由假设(D_5),$A-B_2C_1$ 是稳定阵。因此,闭环系统(4.5.8)稳定。

下证 $\|G_{zw}(s)\|_\infty<1$ 成立。由式(4.5.8),得

$$\|G_{zw}(s)\| = C_1(sI - A_L)^{-1}B_L \tag{4.5.10}$$

其中 $A_L=A-LC_2$,$B_L=B_1-LD_{21}$。

利用假设(D_1),Riccati 方程(4.5.3)等价于

$$A_LY + YA_L^{\mathrm{T}} + YC_1^{\mathrm{T}}C_1Y + B_LB_L^{\mathrm{T}} = 0 \tag{4.5.11}$$

且 $A_L^T+C_1^TC_1Y$ 稳定。故由定理 4.3.7 可知

$$\|G_{zw}^T(s)\|_\infty=\|B_L^T(sI-A_L^T)^{-1}C_1^T\|_\infty<1$$

因此

$$\|G_{zw}(s)\|=\|G_{zw}^T(s)\|_\infty<1$$

必要性。设对于由式(4.5.1)给定的 $G(s)$ 存在 $K(s)$，使得图 4.5.1(a)所示系统内稳定，且

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty<1$$

则由引理 4.5.1，图 4.5.1(b)所示对偶系统内稳定，且

$$\|G_{\tilde{z}\tilde{w}}(s)\|_\infty<1$$

因为

$$G^T(s)=\begin{bmatrix}A^T & C_1^T & C_2^T\\ B_1^T & 0 & D_{21}^T\\ B_2^T & I & 0\end{bmatrix} \tag{4.5.12}$$

即 $G^T(s)$ 的状态空间实现为

$$\dot{\xi}=A^T\xi+C_1^T\tilde{w}+C_2^T\tilde{u} \tag{4.5.13a}$$

$$\tilde{z}=B_1^T\xi+D_{21}^T\tilde{u} \tag{4.5.13b}$$

$$\tilde{y}=B_2^T\xi+\tilde{w} \tag{4.5.13c}$$

则，控制器可以表示为

$$\tilde{u}=K^T(s)\tilde{y}=K^T(s)B_2^T\xi+K^T(s)\tilde{w}=[K^T(s)B_2^T\quad K^T(s)]\begin{bmatrix}\xi\\ \tilde{w}\end{bmatrix}=\tilde{K}(s)\begin{bmatrix}\xi\\ \tilde{w}\end{bmatrix} \tag{4.5.14}$$

由式(4.5.13a)、(4.5.13b)以及式(4.5.14)可知，对于等价的广义被控对象

$$\tilde{G}(s)=\begin{bmatrix}A^T & C_1^T & C_2^T\\ B_1^T & 0 & D_{21}^T\\ \begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix} & 0\end{bmatrix} \tag{4.5.15}$$

$\tilde{K}(s)$ 正是 H_∞ 标准控制问题的完全解。因此，如果 $\tilde{G}(s)$ 满足 4.4.4 小节的假设(C_1) ~ (C_4)，则由定理 4.4.7 可知，与 Riccati 方程(4.4.30)相对应的 Riccati 方程(4.5.3)有半正定解 $Y\geq 0$，且使得 $A^T+(C_1^TC_1-C_2^TC_2)Y$ 是稳定阵。因此，定理的必要性得证。

下面就来验证，对于 $\tilde{G}(s)$，假设(C_1) ~ (C_4)成立。首先，由假设(D_1)，(C_2, A)能检测，故(A^T, C_2^T)能稳定，(C_1)成立。显然，假设(D_2)、(D_3)与(C_2)、(C_4)是等价的。 证毕

需要指出的是，假设条件(D_5)对控制系统的设计来说是比较苛刻的。所以，定理 4.5.1 只是说明了输出反馈动态控制器设计的一种思路。下两小节，我们将在较一般的假设条件下，利用 Riccati 方法和 LMI 方法，求解 H_∞ 标准控制问题的输出动态反馈解。

4.5.2 基于 Riccati 方程的输出反馈解

现在，我们去掉上小节对广义对象所做的假设(D_4)和(D_5)，即设广义被控对象的状态空间实现为

$$G(s)=\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5.16}$$

并做如下假设：

(E_1) (A,B_1)能稳定，(C_1,A)能检测。

(E_2) (A,B_2)能稳定，(C_2,A)能检测。

(E_3) $D_{12}^{T}[C_1 \quad D_{12}]=[0 \quad I]$。

(E_4) $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^{T}=\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$。

系统(4.5.16)中，我们实际上已经取 $D_{11}=0$ 和 $D_{22}=0$。关于 $D_{11}=0$ 的讨论同 4.4 节关于状态反馈情形的讨论。而对于假设 $D_{22}=0$，我们将在下小节给出解释。如前，假设(E_1)～(E_4)都是很一般的假设，无需再做解释。

对广义被控对象(4.5.16)和给定的 $\gamma>0$，在假设(E_1)～(E_4)下，所要求解的 H_∞ 标准控制问题为：

【问题 4.5.1】(H_∞ 次优控制)　设计输出反馈控制律

$$u=K(s)Y \tag{4.5.17}$$

使得图 4.2.1 所示闭环系统内稳定，且

$$\| G_{zw}(s)\|_\infty<\gamma \tag{4.5.18}$$

我们看到，所要设计的满足 H_∞ 性能的输出反馈控制律(4.5.17)为动态控制律。

【定理 4.5.2】　问题 4.5.1 有解的充分必要条件为

(1) Riccati 方程

$$A^{T}X_\infty+X_\infty A+X_\infty(\gamma^{-2}B_1B_1^{T}-B_2B_2^{T})X_\infty+C_1^{T}C_1=0 \tag{4.5.19a}$$

$$AY_\infty+Y_\infty A^{T}+Y_\infty(\gamma^{-2}C_1^{T}C_1-C_2^{T}C_2)Y_\infty+B_1B_1^{T}=0 \tag{4.5.19b}$$

有解 $X_\infty\geqslant 0, Y_\infty\geqslant 0$。

(2) $\bar{\sigma}(X_\infty Y_\infty)<\gamma^2$。

若上述条件成立，则使闭环内稳定且式(4.5.18)成立的输出反馈动态控制器为

$$K(s)=\begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5.20}$$

其中

$$\hat{A}_\infty=A+\gamma^{-2}B_1B_1^{T}X_\infty+B_2F_\infty+Z_\infty L_\infty C_2$$

$$F_\infty=-B_2^{T}X_\infty, L_\infty=-Y_\infty C_2^{T}, Z_\infty=(I-\gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

下面的定理给出了问题 4.5.1 的所有解的集合(参数化形式解)。

【定理 4.5.3】　如果定理 4.5.2 中的条件(1)、(2)成立，则问题 4.5.1 的所有解等于图 4.5.2 中从 y 到 u 的传函阵的集合。其中 $Q(s)\in RH_\infty$ 且 $\| Q(s)\|_\infty<\gamma$。M_∞的状态空间实现为

$$M_\infty(s)=\begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5.21}$$

其中 $\hat{A}_\infty$、Z_∞、L_∞的定义同定理 4.5.2。

值得注意的是如在定理 4.5.3 的 H_∞次优控制器参数化结果中，令参数 $Q(s)=0$，则得到定理 4.5.2 的控制器(4.5.20)，称为 H_∞中心控制器。

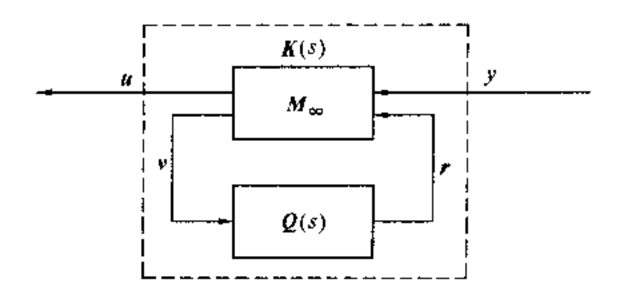


图 4.5.2 控制器参数化

定理 4.5.2 给出的输出反馈 H_∞ 次优控制器的状态空间设计方法是 Doyle 等四人(简称为 DGKF)在文献[42]中,Glover 和 Doyle 在文献[62]中首先提出的。但定理 4.5.2 的证明比较冗长,并且涉及到算子理论、泛函空间等知识,有兴趣的读者可参阅上述两篇文献。DGKF 的结果表明了 H_∞ 次优控制器的结构分离特性和与 LQG(H_2)控制器的关系。对以上两点,我们从系统信号的关系出发,做如下分析。因为,根据第一章的泛函分析知识,传函阵的 H_∞ 范数可表示为信号的 H_2 范数的透导范数,而求反馈控制器 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}(s)\boldsymbol{y}$ 的问题,也可以解释为求控制信号 $\boldsymbol{u}(t)$ 的问题。所以,从系统信号关系角度分析控制系统,有利于我们进一步理解 H_∞ 控制器的机理。首先,考虑状态反馈 H_∞ 控制系统的情况。

由第一章泛函分析知识可知,$\|\boldsymbol{G}_{zw}(s)\|_\infty<1$ 等价于

$$\sup_{w\in L_2[0,+\infty)}\frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}<1 \tag{4.5.22}$$

因此,对于 4.4.4 小节状态反馈的完全解所考虑的广义被控对象

$$\dot{x}=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}_1 w+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u} \tag{4.5.23a}$$

$$z=\boldsymbol{C}_1 x+\boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{u} \tag{4.5.23b}$$

求反馈控制器使得闭环系统内稳定,且满足

$$\inf_u\|\boldsymbol{G}_{zw}(s)\|_\infty<1$$

的问题,从信号的角度就可记为

$$\inf_u\sup_w\frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}<1 \tag{4.5.24}$$

或者,等价于求控制输入信号 $\boldsymbol{u}$,使得系统稳定($\boldsymbol{x}\in L_2[0,+\infty)$),且

$$\inf_u\|z\|_2^2<\|w\|_2^2,\ \forall w\in L_2[0,+\infty) \tag{4.5.25}$$

设广义被控对象(4.5.23)满足假设条件(C_1)~(C_4),且 Riccati 方程(4.4.30)有半正定解 $\boldsymbol{P}\geqslant\boldsymbol{0}$。令

$$V[\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \tag{4.5.26}$$

对于任意给定的 $w\in L_2[0,+\infty)$ 和初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}$,函数 $V[\boldsymbol{x}(t)]$ 沿方程(4.5.23a)的解轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$ 的导数为

$$\dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]=\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}+2w^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{4.5.27}$$

将 Riccati 方程(4.4.30)代入上式,得

$$\begin{aligned}\dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}+2w^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\\&-\|w-\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\|^2-\|z\|^2+\|w\|^2\end{aligned} \tag{4.5.28}$$

其中,$\|z\|^2=z^{\mathrm{T}}z$。如果控制信号 $\boldsymbol{u}$ 使系统稳定,即 $\boldsymbol{x}\in L_2[0,+\infty)$,则 $\boldsymbol{x}(\infty)=\boldsymbol{0}$。所以,注意到 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}$,得

$$\int_0^{\infty}\dot{V}[x(t)]\mathrm{d}t = -\|w - B_1^{\mathrm{T}}Px\|_2^2 + \|u + B_2^{\mathrm{T}}Px\|_2^2 - \|z\|_2^2 + \|w\|_2^2 = 0 \tag{4.5.29}$$

因此,上式给出了系统(4.5.23)的扰动信号 w 和控制输入信号 u 之间的恒等关系

$$\|z\|_2^2 = \|w\|_2^2 + \|u + B_2^{\mathrm{T}}Px\|_2^2 - \|w - B_1^{\mathrm{T}}Px\|_2^2 \tag{4.5.30}$$

显然,如果取

$$u = -B_2^{\mathrm{T}}Px \tag{4.5.31}$$

则由式(4.5.30)可知,对于任意的 $w \in L_2[0, +\infty)$,式(4.5.25)成立。或者,等价于满足式(4.5.24)的 u 可以由状态反馈生成。而式(4.5.31)的 u 正是定理4.4.7给出的基于状态反馈的 H_∞ 标准控制问题的解(取参数 $Q(s)=0$)。

将式(4.5.31)给出的状态反馈控制律代入式(4.5.30),可得

$$\frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} = 1 - \frac{\|w - B_1^{\mathrm{T}}Px\|_2^2}{\|w\|_2^2} \tag{4.5.32}$$

上式表明,对于任意 $w \neq B_1^{\mathrm{T}}Px$,有

$$\frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} < 1 \tag{4.5.33}$$

而对于扰动信号

$$w = B_1^{\mathrm{T}}Px \in L_2[0, +\infty) \tag{4.5.34}$$

有

$$\frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} = 1 \tag{4.5.35}$$

即,对于由式(4.5.34)给定的扰动信号,系统从 w 到 z 的"增益"为最大。从控制目的来讲,就是要减小这个"增益",使该"增益"为最小(H_∞ 最优控制)或小于某给定值(H_∞ 次优控制)。因此,从这个意义上讲,由式(4.5.34)给定的 w 称为最劣扰动输入,记为 w_{worst}。而与此对应,称式(4.5.31)的 u 为最佳控制输入。显然,这里所说的"增益"正是闭环系统从 w 到 z 的算子的范数,即闭环系统的 H_∞ 范数。

下面再来分析由定理4.5.2给出的 H_∞ 输出反馈控制器。显然,式(4.5.20)的控制器 $K(s)$ 的状态空间描述为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1\hat{w}_{\mathrm{worst}} + B_2u - Z_\infty L_\infty(y - C_2\hat{x}) \tag{4.5.36a}$$

$$u = -B_2^{\mathrm{T}}X_\infty\hat{x} \tag{4.5.36b}$$

其中

$$\hat{w}_{\mathrm{worst}} = \gamma^{-2}B_1^{\mathrm{T}}X_\infty\hat{x} \tag{4.5.37a}$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1} \tag{4.5.37b}$$

$$L_\infty = -Y_\infty C_2^{\mathrm{T}} \tag{4.5.37c}$$

系统的结构图如图4.5.3所示。从图中可以看出,输出反馈 H_∞ 控制器由两部分构成:第一部分是状态估计器,它由方程(4.5.36a)表示,如前所述,$\hat{w}_{\mathrm{worst}}$ 实际上是 $\frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}$ 最大(干扰抑制效果最差)时,扰动输入的一个估计值,故称式(4.5.36a)为最劣扰动下的状态估计器;第二

部分是利用状态估计值进行反馈控制的项,即式(4.5.36b)。这两部分的作用与2.7节的LQG最优控制中利用估计器获得状态估计值,然后再利用状态估计值实现最优反馈控制是类似的,并且,状态估计值 $\hat{x}(t)$ 的计算与最佳控制输入阵 $F_\infty = -B_2^T X_\infty$ 的计算是相互独立的。即 H_∞ 输出反馈控制器具有结构分离特性。

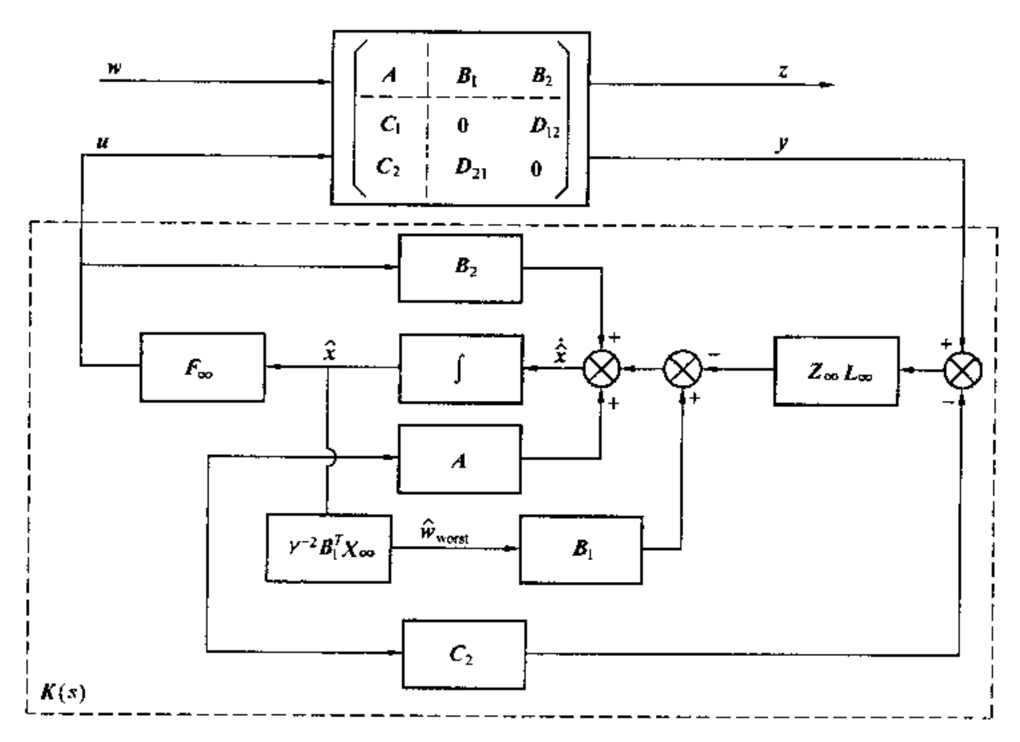


图4.5.3 输出反馈 H_∞ 控制系统结构图——估计与控制的结合

另一方面,如果令 $\gamma \to \infty$,则式(4.5.36)的控制器化为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u - L_\infty(Y - C_2\hat{x}) \tag{4.5.38a}$$

$$u = -B_2^T X_\infty \hat{x} \tag{4.5.38b}$$

其中 X_∞ 和 Y_∞ 分别是 Riccati 方程(4.5.19a)和(4.5.19b)当 $\gamma \to \infty$ 时的解。这时,输出反馈 H_∞ 控制器就变为输出反馈的LQG(H_2)控制器(详见第六章)。因此,LQG最优控制问题可以看做为 H_∞ 最优控制问题的一个特例。即当放宽对闭环系统 H_∞ 范数要求时,H_∞ 最优控制问题就化为LQG最优控制问题。

最后,通过一个算例来说明输出反馈 H_∞ 控制器的设计方法和步骤。

【例4.5.1】 考虑一阶线性定常系统

$$\dot{x} = -2x + w_1 + u$$

$$y = x + w_2$$

其中 w_1 和 w_2 分别为过程噪声和量测噪声,u 和 y 分别为控制输入和量测输出。干扰抑制目标可用如下被控输出表示

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

要求设计动态输出反馈控制器 $K(s)$,使系统从 $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ 到 $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$ 的传函阵 $G_{zw}(s)$ 满足

$$\| G_{zw} \|_\infty < 1$$

系统设计分如下四步进行：

(1) 将广义被控对象化为标准形式

$$\dot{x} = -2x + [1 \quad 0]\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + u$$

$$y = x + [0 \quad 1]\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

即

$$G(s) = \left[\begin{array}{c:cc} -2 & [1 \quad 0] & 1 \\ \hdashline \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 & [0 \quad 1] & 0 \end{array}\right]$$

(2) 验证假设条件$(E_1) \sim (E_4)$

(E_1) $(A, B_1) = (-2, [1 \quad 0])$能控，$(C_1, A) = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, -2)$能观测。

(E_2) $(A, B_2) = (-2, 1)$能稳定，$(C_2, A) = (1, -2)$能检测。

(E_3) $D_{12}^{T}[C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1]$。

(E_4) $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

假设条件$(E_1) \sim (E_4)$均成立。

(3) 求解式(4.5.19a)和式(4.5.19b)的 Riccati 方程

$$-2X_\infty - 2X_\infty + 1 = 0$$

$$-2Y_\infty - 2Y_\infty + 1 = 0$$

解得 $X_\infty = Y_\infty = \frac{1}{4} > 0$。验证式(4.5.19c)

$$X_\infty Y_\infty = \frac{1}{16} < \gamma^2 = 1$$

即式(4.5.19)的三个条件均满足，于是存在输出反馈 H_∞控制器 $K(s)$，使得闭环系统内稳定，并且

$$\| G_{zw}(s) \|_\infty < 1$$

成立。

(4) 构造输出反馈 H_∞控制器 $K(s)$。根据式(4.5.36)，输出反馈 H_∞控制器的方程为

$$\dot{\hat{x}} = -\frac{121}{60}\hat{x} + \frac{4}{15}y + u$$

$$u = -\frac{1}{4}\hat{x}$$

对上两式取拉氏变换，求得从 $Y(s)$到 $U(s)$的传函即为 $K(s)$

$$K(s)=\frac{-\frac{1}{34}}{\frac{15}{34}s+1}$$

4.5.3 同时 H_∞ 控制器参数化

我们在 3.4 节得到了同时镇定控制器参数化公式，并在 3.5 节应用该参数化公式讨论了同时镇定系统 H_∞ 性能设计问题。上小节定理 4.5.3 的单目标 H_∞ 控制器参数化结果，可以用来求解满足 H_∞ 性能的同时镇定控制器参数化公式，称之为同时 H_∞ 控制器参数化。

首先，我们将定理 4.5.3 的参数化结果转换到频率域。将图 4.5.2 中传函矩阵 M_∞ 分块，可写出

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = M_\infty \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\infty^1 & M_\infty^2 \\ M_\infty^3 & M_\infty^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix}$$

并可求得

$$M_\infty^1 = -B_2^{\mathrm{T}}X_\infty(sI-\hat{A}_\infty)^{-1}Z_\infty Y_\infty C_2^{\mathrm{T}} \qquad M_\infty^2 = -B_2^{\mathrm{T}}X_\infty(sI-\hat{A}_\infty)^{-1}Z_\infty B_2 + I$$

$$M_\infty^3 = -C_2(sI-\hat{A}_\infty)^{-1}Z_\infty Y_\infty C_2^{\mathrm{T}} + I \qquad M_\infty^4 = -C_2(sI-\hat{A}_\infty)^{-1}Z_\infty B_2$$

于是从 y 到 u 的传函矩阵为

$$K(s) = G_{uy}(s) = M_\infty^1 + M_\infty^2 Q(I - M_\infty^4 Q)^{-1}M_\infty^3 \tag{4.5.39}$$

【定理 4.5.4】 (1) M_∞^2、M_∞^3 为非奇异矩阵。

(2) 如果式(4.5.19a)和式(4.5.19b)的 Riccati 方程有解 $X_\infty \geqslant 0, Y_\infty \geqslant 0, \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$，则广义对象 G 的满足性能指标(4.5.18)的镇定控制器的集合为

$$S_\infty(K) = \{K(Q) = (\widetilde{M}_\infty^1 + \widetilde{M}_\infty^2 Q)(I - M_\infty^4 Q)^{-1}M_\infty^3 \mid Q \in RH_\infty,$$
$$\|Q\|_\infty < \gamma, \det(I - M_\infty^4 Q) \neq 0\} \tag{4.5.40a}$$
$$= \{K(Q) = M_\infty^2(I - QM_\infty^4)^{-1}(\overline{M}_\infty^1 + Q\overline{M}_\infty^3) \mid Q \in RH_\infty,$$
$$\|Q\|_\infty < \gamma, \det(I - QM_\infty^4) \neq 0\} \tag{4.5.40b}$$

其中

$$\widetilde{M}_\infty^1 = M_\infty^1 M_\infty^{3^{-1}} \qquad \widetilde{M}_\infty^2 = M_\infty^2 - M_\infty^1 M_\infty^{3^{-1}} M_\infty^4 \tag{4.5.41a}$$

$$\overline{M}_\infty^1 = M_\infty^{2^{-1}} M_\infty^1 \qquad \overline{M}_\infty^3 = M_\infty^3 - M_\infty^4 M_\infty^{2^{-1}} M_\infty^1 \tag{4.5.41b}$$

【证明】 (1) 事实上，如果 $X \in \mathbf{R}^{n\times n}$，则

$$(sI - X)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI - X)}{\det(sI - X)}$$

其中 $\det(sI-X)$ 为 n 次多项式，伴随矩阵的各元素为次数严格小于 n 的多项式。于是

$$\lim_{s\to\infty}\det(M_\infty^2(s)) = \lim_{s\to\infty}\det(I - B_2^{\mathrm{T}}X_\infty(sI-\hat{A}_\infty)^{-1}Z_\infty B_2) = 1$$

已知 $\det(M_\infty^2(s))$ 是复变量 s 的连续函数，因此，$M_\infty^2(s)$ 是非奇异矩阵。类似地可证明，M_∞^3 也是非奇异矩阵。

(2) 对式(4.5.39)的传函矩阵 $G_{uy}(s)$，做如下推演(为简便计，略去下标 ∞)：

$$G_{uy}(s) = M^1 + M^2Q(I - M^4Q)^{-1}M^3 =$$

$$M^1M^{3^{-1}}(I - M^4Q)(I - M^4Q)^{-1}M^3 + M^2Q(I - M^4Q)^{-1}M^3 =$$

$$[M^1M^{3^{-1}}(I-M^4Q)+M^2Q](I-M^4Q)^{-1}M^3=$$
$$[M^1M^{3^{-1}}+(M^2-M^1M^{3^{-1}}M^4)Q](I-M^4Q)^{-1}M^3=$$
$$(\widetilde{M}^1+\widetilde{M}^2Q)(I-M^4Q)^{-1}M^3 \tag{4.5.42}$$

其中 $\widetilde{M}^1$、$\widetilde{M}^2$ 如式(4.5.41a)所示。另一方面,利用著名的矩阵等式

$$Q(I-M^4Q)^{-1}=(I-QM^4)^{-1}Q$$

我们有

$$G_{uy}(s)=M^1+M^2Q(I-M^4Q)^{-1}M^3=M^1+M^2(I-QM^4)^{-1}QM^3$$

类似于式(4.5.42)的推演,我们有

$$G_{uy}(s)\ =\ M^2(I\ -\ QM^4)^{-1}(\overline{M}^1\ +\ Q\overline{M}^3) \tag{4.5.43}$$

其中 $\overline{M}^1$、$\overline{M}^3$ 如式(4.5.41b)所示。

最后,根据定理 4.5.3 的结论,本定理的结论(2)成立。 **证毕**

注 控制器集合 $S_\infty(K)$中的两个条件 $\det(I-M^4Q)\neq0$ 和 $\det(I-QM^4_\infty)\neq0$ 通常都能得到满足。事实上,矩阵 M^4_∞是严格正则的,且 $Q\in RH_\infty$,所以

$$\lim_{s\to\infty}\det(I-M^4_\infty Q)=1 \qquad 和 \qquad \lim_{s\to\infty}\det(I-QM^4_\infty)=1$$

因此,由 $\det(\cdot)$关于 s 的连续性,我们有 $\det(I-M^4_\infty Q)\neq0$ 和 $\det(I-QM^4_\infty)\neq0$。

接下来,根据定理 4.5.4,我们讨论满足 H_∞性能指标的同时镇定问题。

【定义 4.5.1】(H_∞性能) 同时镇定 H_∞范数性能指标为

$$\|T_{zwj}\|_\infty\ <\ \gamma \qquad 0\leqslant j\leqslant l+1 \tag{4.5.44}$$

其中 T_{zwj}为第 j 个广义对象 G_j 的从 w_j 到 z_j 的闭环传函矩阵,$0<\gamma\in R$。

【定理 4.5.5】 如果 $l+1$ 个广义对象 $G_j(j=0,1,\cdots,l)$对应的 Riccati 方程(4.5.19a)和(4.5.19b)有解:$X_{j\infty}\geqslant\mathbf{0},Y_{j\infty}\geqslant\mathbf{0},\rho(X_{j\infty}Y_{j\infty})<\gamma^2(j=0,1,\cdots,l)$,则 $G_j(j=0,1,\cdots,l)$的满足性能指标(4.5.44)的同时镇定控制器的集合为

$$S_l^\infty(K)\ =\ \{K_0(Q_0)\mid\ =\ (\widetilde{M}^{10}_\infty\ +\ \widetilde{M}^{20}_\infty Q_0)(I\ -\ M^{40}_\infty)^{-1}M^{30}_\infty\ \mid Q_0\ \in\ \Lambda \tag{4.5.45}$$

$$\Lambda\ =\ \{Q_0\ \in\ RH_\infty,\|Q_0\|_\infty\ <\ \gamma,\det(I\ -\ M^{40}_\infty Q_0)\ \neq\ 0,且\ \exists\ Q_j\ \in\ RH_\infty,$$
$$\|Q_j\|_\infty\ <\ \gamma,\det(I\ -\ M^{4j}_\infty Q_j)\ \neq\ 0,\mathrm{s.t.}\ T_{0j}\ -\ T_{1j}Q_j\ +\ Q_0T_{2j}\ +\ Q_0T_{3j}Q_j\ =\ \mathbf{0},j\ =\ 1,2,\cdots,l\} \tag{4.5.46}$$

其中

$$\begin{aligned} T_{0j}&=\overline{M}^{10}_\infty M^{3j^{-1}}_\infty-M^{20^{-1}}_\infty\widetilde{M}^{1j}_\infty \qquad & T_{1j}&=M^{20^{-1}}_\infty\widetilde{M}^{2j}_\infty+\overline{M}^{10}_\infty M^{3j^{-1}}_\infty M^{4j}_\infty \\ T_{2j}&=\overline{M}^{30}_\infty M^{3j^{-1}}_\infty+M^{40}_\infty M^{20^{-1}}_\infty\widetilde{M}^{1j}_\infty \qquad & T_{3j}&=M^{40}_\infty M^{20^{-1}}_\infty\widetilde{M}^{2j}_\infty-\overline{M}^{30}_\infty M^{3j^{-1}}_\infty M^{4j}_\infty \end{aligned} \tag{4.5.47}$$

【证明】 设 $l+1$ 个广义对象 G_j 的镇定控制器分别为$K_j(j=0,1,\cdots,l)$,取 G_0 为主对象,K_0 为主控制器,则 K_0 同时镇定 $G_j(j=0,1,\cdots,l)$的充分必要条件为 $K_0(Q_0)=K_j(Q_j)(1\leqslant j\leqslant l)$。于是由定理 4.5.4 的式(4.5.40a)和式(4.5.40b),对于 $1\leqslant j\leqslant l$ 均有(略去下标 ∞)

$$K_0(Q_0)=K_j(Q_j)\Leftrightarrow$$

$$M^{20}(I-Q_0M^{40})^{-1}(\overline{M}^{10}+Q_0\overline{M}^{30})=(\widetilde{M}^{1j}+\widetilde{M}^{2j}Q_j)(I-M^{4j}Q_j)^{-1}M^{3j}\Leftrightarrow$$

$$\overline{M}^{10}M^{3j^{-1}}-M^{20^{-1}}\widetilde{M}^{1j}-(M^{20^{-1}}\widetilde{M}^{2j}+\overline{M}^{10}M^{3j^{-1}}M^{4j})Q_j+Q_0(\overline{M}^{30}M^{3j^{-1}}+M^{40}M^{20^{-1}}\widetilde{M}^{1j})$$

$$+Q_0(M^{40}M^{20^{-1}}\widetilde{M}^{2j}-\overline{M}^{30}M^{3j^{-1}}M^{4j})Q_j=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$T_{0j}-T_{1j}Q_j+Q_0T_{2j}+Q_0T_{3j}Q_j=\mathbf{0}$$

其中 T_{0j}、T_{1j}、T_{2j}，T_{3j}如式(4.5.47)所示。 **证毕**

【例 4.5.2】 设广义对象为$\left[A,[B_1,B_2],\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix},D\right]$，其中

$$A=a,[B_1,B_2]=[b\quad 0\quad \vdots\quad 1],\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\c\\\cdots\\1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0&0&\vdots&1\\0&0&\vdots&0\\\hdashline 0&1&\vdots&0\end{bmatrix}$$

取 $a=-1,b=c=0.6$，相应的系统记为 G_0；取 $a=-0.5,b=0.4,c=0.8$，相应的系统记为 G_1。求 G_0,G_1 的满足 H_∞性能指标(4.5.44)的同时镇定控制器。

【解】 取 $\gamma=1$，可求得 $X_{0\infty}=Y_{0\infty}=0.17>0$，且 $I-X_{0\infty}Y_{0\infty}=0.971>0$；$X_{1\infty}=0.461>0$，$Y_{1\infty}=0.151>0$，且 $I-X_{1\infty}Y_{1\infty}=0.93>0$。所求控制器的集合为

$$K_0(Q_0)=\frac{-0.03+(s+0.933)Q_0}{s+1.284+1.03Q_0}$$

其中 $Q_0\in\{Q_0\in RH_\infty,\|Q_0\|_\infty<1$，且$\exists Q_1\in RH_\infty,\|Q_1\|_\infty<1$，s.t.

$0.045s^3+0.17s^2+0.213s+0.088-(s^4+4.008s^3+5.789s^2+3.502s+0.719)Q_1+(s^4+4.316s^3+7.03s^2+5.137s+1.423)Q_0+(0.045s^3+0.706s^2+1.464s+0.81)Q_0Q_1=0\}$

若取 $Q_0=\dfrac{1}{s+4}$，显然 $Q_0\in RH_\infty$，$\|Q_0\|_\infty<1$。由约束条件可得

$$Q_1=-\frac{1.045s^4+4.666s^3+7.923s^2+6.077s+1.775}{s^5+8.008s^4+21.77s^3+25.952s^2+13.263s+2.066}$$

可验证 Q_1 的分母为霍尔维茨多项式，且 $\|Q_1\|_\infty=0.859$。可验证 $K_0(s)$与 $G_{uy_0}(s)$和 $G_{uy_1}(s)$构成的闭环是稳定的，且

$$T^{\mathrm{T}}_{zw_0}(-\mathrm{j}\omega)T_{zw_0}(\mathrm{j}\omega)<I,\forall\omega,T^{\mathrm{T}}_{zw_1}(-\mathrm{j}\omega)T_{zw_1}(\mathrm{j}\omega)<I,\forall\omega$$

最后形式的控制器为

$$K_0(s)=\frac{-0.03(s+4)+(s+0.933)}{(s+1.284)(s+4)+1.03}$$

4.5.4 基于 LMI 的输出反馈解

考虑式(4.2.1)的 n 阶线性时不变广义被控对象，其状态空间实现为

$$G(s)=\left[\begin{array}{c:cc}A&B_1&B_2\\\hdashline C_1&D_{11}&D_{12}\\C_2&D_{21}&D_{22}\end{array}\right]\tag{4.5.48}$$

假设矩阵 D_{22}能使闭环系统是良定的，详见下面的讨论，而关于系统矩阵 A、B_1、B_2、C_1、C_2，D_{11}、D_{12}、D_{21}，我们不做任何假设，这一点不同于上小节的 Riccati 方法。也就是说，我们将在较一般的条件下，求解系统(4.5.48)的输出反馈 H_∞控制问题。

考虑 n_c 阶线性时不变动态($n_c>0$)控制器

$$\dot{x}_c=A_cx_c+B_cy\tag{4.5.49a}$$

$$u=C_cx_c+D_cy\tag{4.5.49b}$$

或静态($n_c=0$)控制器

$$u = Ky \tag{4.5.50}$$

其中 $x_c \in \mathbf{R}^{n_c}$ 是控制器状态。我们用(Σ_c)表示式(4.5.49)和式(4.5.50)的全体控制器($n_c \geqslant 0$)。

下面的讨论我们假定 $D_{22}=0$。当实际的广义被控对象的 $D_{22}\neq 0$ 时,可以通过适当的变换,使其等于零。事实上,如果定义虚构的量测输出信号

$$\hat{y} = C_2 x + D_{21} w$$

并假设 $\hat{y}$ 可用于系统(4.5.48)的动态控制器(4.5.40)的设计。即,此时的动态控制器为

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c \hat{y} \tag{4.5.51a}$$

$$u = C_c x_c + D_c \hat{y} \tag{4.5.51b}$$

然后,以 $y - D_{22}u$ 代替 $\hat{y}$,则由式(4.5.51b),有

$$u = (I + D_c D_{22})^{-1}(C_c x_c + D_c y) = \widetilde{C}_c x_c + \widetilde{D}_c y \tag{4.5.52}$$

可见,式(4.5.52)具有与式(4.5.49b)相同的形式。这样,如果实际的 $D_{22}\neq 0$,可按 $D_{22}=0$ 设计控制器,得到控制器参数 $\widetilde{C}_c$ 和 $\widetilde{D}_c$,再按变换式(4.5.52)求得 $D_{22}\neq 0$ 时的控制器参数 C_c 和 D_c。当然,对 A_c 和 B_c 也要做相应的变换。因此,在良定性的假设下($(I + D_c D_{22})^{-1}$存在),我们仅需考虑在 $D_{22}=0$ 条件下,系统(4.5.48)的 H_∞ 控制问题。

考虑线性时不变控制器(Σ_c)和广义被控对象(4.5.48),其中 $D_{22}=0$。广义对象(4.5.48)与静态控制器(4.5.50)构成的闭环系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{cl}x + B_{cl}w \\ z &= C_{cl}x + D_{cl}w \end{aligned} \tag{4.5.53}$$

其中

$$\begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} K [C_2 \quad D_{21}] \tag{4.5.54}$$

对于动态控制器(4.5.49),相应的闭环系统仍具有式(4.5.54)的形式,但此时的闭环状态变量为 $\hat{x} = [x^{\mathrm{T}} \quad x_c^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,而系统矩阵分别为

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{4.5.55a}$$

$$B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.5.55b}$$

$$C_{cl} = [C_1 + D_{12} D_c C_2 \quad D_{12} C_c] = [C_1 \quad 0] + [D_{12} \quad 0]\begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{4.5.55c}$$

$$D_{cl} = D_{11} + D_{12} D_c D_{21} = D_{11} + [D_{12} \quad 0]\begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.5.55d}$$

若引入如下记号

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{K} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|cc} A & 0 & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{nc} \\ \hline C_1 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ \hline C_2 & 0 & D_{21} & D_c & C_c \\ 0 & I_{nc} & 0 & B_c & A_c \end{array}\right] \tag{4.5.56}$$

则式(4.5.55)中各闭环系统矩阵仍具有式(4.5.54)的形式,只是将各系统矩阵和静态控制器 K 换成式(4.5.56)中各系统矩阵和控制器 $\hat{K}$。所以固定阶次的动态控制器的设计问题可看做具有式(4.5.55)结构的系统矩阵的静态控制器设计的一个特例。因此,在以下的讨论中,我们将把静态与动态控制器的设计问题放在一起进行,并且采用静态控制器的符号。为了得到动态控制器,只需将相应的矩阵换成式(4.5.56)的各矩阵即可。

【定义 4.5.2】(H_∞控制器) 给定标量 $\gamma>0$。称控制器(Σ_c)是 H_∞控制器,如果下述两个条件成立:

(1) A_{cl}是渐近稳定的。

(2) $\|G_{zw}\|_\infty<\gamma$。

其中 G_{zw}表示从 w 到 z 的闭环传函阵。

不失一般性,取 $\gamma=1$。

以下我们将讨论定义 4.5.2 给出的 H_∞控制器存在的充分必要条件,以及如果这样的控制器存在,找到所有这样的控制器(参数化控制器)。

首先,我们将把 H_∞控制问题转化为关于控制器参数 K 或 $\hat{K}$ 的 LMI 的求解问题,为此,需要如下引理。

【引理 4.5.2】[41] 给定广义被控对象(4.5.48)和控制器(Σ_c)。定义

$$Q = A_{cl}P + PA_{cl}^{\mathrm{T}} + (PC_{cl}^{\mathrm{T}} + B_{cl}D_{cl}^{\mathrm{T}})R^{-1}(PC_{cl}^{\mathrm{T}} + B_{cl}D_{cl}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} + B_{cl}B_{cl}^{\mathrm{T}} \tag{4.5.57}$$

$$R = I - D_{cl}D_{cl}^{\mathrm{T}} \tag{4.5.58}$$

则如下命题等价:

(1) (Σ_c)是一个 H_∞控制器。

(2) $R>0$,且存在 $P>0$ 满足 $Q<0$。

从式(4.5.54)我们看到,对于静态控制器(4.5.50),每个闭环系统矩阵(A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl})均为控制器参数 K 的线性函数。因此,条件 $Q<0$ 和 $R>0$ 关于参数 K 是非线性函数。对于动态控制器(4.5.49),情况也是类似的。下面的引理将两个非线性矩阵不等式 $Q<0$ 和 $R>0$ 转换为一个线性矩阵不等式。

【引理 4.5.3】[63] 考虑广义被控对象(4.5.48)和静态控制器(4.5.50)。如下命题等价:

(1) 控制器(4.5.50)是一个 H_∞控制器。

(2) 存在矩阵 $P>0$ 满足

$$BKC + (BKC)^{\mathrm{T}} + \Omega < 0 \tag{4.5.59}$$

其中

$$\begin{bmatrix} B & \Omega \\ * & C \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} B_2 & AP+PA^{\mathrm{T}} & PC_1^{\mathrm{T}} & B_1 \\ D_{12} & C_1P & -I & D_{11} \\ 0 & B_1^{\mathrm{T}} & D_{11}^{\mathrm{T}} & -I \\ \hline * & C_2P & 0 & D_{21} \end{array}\right]$$

* 号表示无关部分。

【证明】 由 Schur 补引理,式(4.5.57)和式(4.5.58)定义的 Q 和 R 满足 $Q<0$ 和 $R>0$,当且仅当

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X_{cl} + X_{cl}A_{cl}^{\mathrm{T}} + B_{cl}B_{cl}^{\mathrm{T}} & X_{cl}C_{cl}^{\mathrm{T}} + B_{cl}D_{cl}^{\mathrm{T}} \\ C_{cl}X_{cl} + D_{cl}B_{cl}^{\mathrm{T}} & D_{cl}D_{cl}^{\mathrm{T}} - I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.5.60}$$

将上式改写为

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X_{cl}+X_{cl}A_{cl}^{\mathrm{T}} & X_{cl}C_{cl}^{\mathrm{T}} \\ C_{cl}X_{cl} & -I \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{cl} \\ D_{cl} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{cl}^{\mathrm{T}} & D_{cl}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}<0$$

再由 Schur 补引理,式(4.5.60)等价于

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X_{cl}+X_{cl}A_{cl}^{\mathrm{T}} & X_{cl}C_{cl}^{\mathrm{T}} & B_{cl} \\ C_{cl}X_{cl} & -I & D_{cl} \\ B_{cl}^{\mathrm{T}} & D_{cl}^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix}<0 \tag{4.5.61}$$

将式(4.5.54)中的各闭环系统矩阵代入式(4.5.61),经整理,即得式(4.5.59)与式(4.5.61)的等价性。 **证毕**

显然,矩阵不等式(4.5.59)关于控制器参数 K 已是线性矩阵不等式。由引理4.5.2可知,定义4.5.2给出的 H_∞ 控制器的求解等价于线性矩阵不等式(4.5.59)的可解性。下面的定理给出了式(4.5.59)的 LMI 可解的充分必要条件。

【定理 4.5.6】[64] 给定对称矩阵 Ω 和具有适当维数的矩阵 B 和 C,则存在矩阵 K 使得式(4.5.59)成立的充分必要条件为

$$B_\perp^{\mathrm{T}}\ \Omega B_\perp<0 \qquad 且 \qquad (C^{\mathrm{T}})_\perp^{\mathrm{T}}\ \Omega(C^{\mathrm{T}})_\perp<0 \tag{4.5.62}$$

其中 $B_\perp$ 称为 B 的直交补矩阵,即 $B_\perp$ 的列由 B^{T} 的零空间的一个基底构成。

根据定理4.5.6,可得广义被控系统(4.5.48)的如下基于 LMI 的 H_∞ 控制器设计问题的可解性条件。

【定理 4.5.7】[64] 考虑广义被控系统(4.5.48)。令$[W_1^{\mathrm{T}} \quad W_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和$[V_1^{\mathrm{T}} \quad V_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 分别为$[B_2^{\mathrm{T}} \quad D_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和$[C_2 \quad D_{21}]^{\mathrm{T}}$ 的直交补矩阵,则 H_∞ 控制器设计问题可解,当且仅当存在两个对称阵 $X,Y\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足如下三个 LMI

$$\begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ W_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} AX+XA^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}} & B_1 \\ C_1X & -I & D_{11} \\ B_1^{\mathrm{T}} & D_{11}^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_2 & 0 \\ W_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}<0 \tag{4.5.63a}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}Y+YA & YB_1 & C_1^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}}Y & -I & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ C_1 & D_{11} & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}<0 \tag{4.5.63b}$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{4.5.63c}$$

进而,如果对于解矩阵 X、Y 有 $\operatorname{rank}(I-XY)=n_c\leqslant n$,则存在阶次为 n_c 的全阶(降阶)H_∞ 控制器。

可验证,式(4.5.63)中的三个 LMI 约束条件是凸约束。也就是说,求解式(4.5.63)的 LMI 的解(X,Y)是一个凸优化问题

$$\begin{cases} \min\ \gamma \\ \text{s.t.}\quad 式(4.5.63)中三个 LMI 成立 \end{cases}$$

该凸优化问题可通过 Matlab 中的 LMI 工具箱中的相应函数求解。一旦解得(X,Y),那么,H_∞ 控制器可按如下方法求得。如果 $n_c=\operatorname{rank}(I-XY)=0$,则置 $P=Y$,相应地得到静态控制器。

否则,通过 SVD(奇异值分解)技术,计算两个列满秩矩阵 $M,N\in\mathbf{R}^{n\times n_c}$,使得

$$MN^{\mathrm{T}} = I - XY \tag{4.5.64}$$

然后,求解如下线性矩阵方程

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ N^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} I & X \\ 0 & M^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{4.5.65}$$

得到惟一解 P。注意,当 $Y>0$ 和 M 列满秩时,方程(4.5.65)总是可解的,并且式(4.5.63c)保证了 $P>0$[64]。

最后,利用 LMI 优化算法,可求解式(4.5.59),得到控制器参数阵 A_c、B_c、C_c 和 D_c,也可以通过下述的代数方法,求解控制器参数阵,并得到所有 H_∞ 控制器的解集合(参数化控制器)。下面给出一种简单的特例。

设矩阵 B 列满秩,矩阵 C 行满秩,则式(4.5.59)的 LMI 的所有解 K 可按如下代数方法求取

$$K = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\Phi C^{\mathrm{T}}(C\Phi C^{\mathrm{T}})^{-1} + R^{-1}S^{\frac{1}{2}}L(C\Phi C^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{2}} \tag{4.5.66a}$$

$$\Phi = (BR^{-1}B^{\mathrm{T}} - \Omega)^{-1} > 0 \tag{4.5.66b}$$

$$S = R - B^{\mathrm{T}}[\Phi - \Phi C^{\mathrm{T}}(C\Phi C^{\mathrm{T}})^{-1}C\Phi]B \tag{4.5.66c}$$

其中自由参数 R、L 满足

$$R>0,\ \|L\|<1$$

如果矩阵 B、C 为降秩矩阵,则可采用矩阵的满秩分解技术,求得相应的控制器集合,详见文献[63]。

对上面的讨论做一下总结。H_∞ 控制器(Σ_c)的求解分两步进行:首先,求解由式(4.5.63)给定的三个 LMI,这里待求解的未知量是与广义对象阶次相等的两个对称阵 X 和 Y;第二步,已知 X 和 Y,以及广义对象状态空间参数阵,求解式(4.5.59)的 LMI(可称为控制器 LMI)或式(4.5.66)给出的代数方程,得到动态控制器参数阵 $\hat{K}(A_c,B_c,C_c,D_c)$ 或静态控制器的增益阵 K。

4.6 参数不确定系统的鲁棒 H_∞ 控制

工程实际控制问题中存在一类不确定性,这类不确定性可以描述为对象状态空间模型中参数的摄动,它并不改变对象模型动态的阶次。例如,模型参数中所包含的各种摩擦系数、质量、转动惯量等参数的量测误差,元器件老化等因素引起的变化等不确定性都可用参数的摄动来描述。本节主要讨论这类参数不确定性系统的鲁棒稳定、鲁棒镇定和鲁棒 H_∞ 性能设计的问题。

设具有参数不确定性的被控对象为

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x + B_1 w + (B_2 + \Delta B_2(t))u \tag{4.6.1a}$$

$$z = Cx + Du \tag{4.6.1b}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$, $w\in\mathbf{R}^r$, $z\in\mathbf{R}^m$, $u\in\mathbf{R}^p$, A、B_1、B_2、C、D 为已知标称系统矩阵,ΔA、ΔB 表示 A、B 的不确定性且满足如下匹配条件

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B_2(t)] = E\Sigma(t)[F_a \quad F_b] \tag{4.6.2}$$

其中 E、F_a、F_b 为具有适当维数的已知矩阵,$\Sigma(t)$ 为未知函数阵,并假设 $\Sigma(t)$ 属于如下定义

的集合 Ω

$$\Omega = \{\boldsymbol{\Sigma}(t) \mid \boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Sigma}(t) \leqslant \boldsymbol{I}, \forall t\} \tag{4.6.3}$$

集合 Ω 所描述的不确定性称为范数有界条件。

对于给定的被控对象(4.6.1)和(4.6.2),所要求解的问题为:

【问题 4.6.1】 设计状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{4.6.4}$$

使闭环系统满足如下鲁棒 H_∞ 性能准则:

(1) $\forall \boldsymbol{\Sigma}(t) \in \Omega$,闭环系统(4.6.1)和(4.6.4)内稳定。

(2) $\forall \boldsymbol{\Sigma}(t) \in \Omega$,在零初始条件下,从 $\boldsymbol{w}$ 到 $\boldsymbol{z}$ 的闭环传函阵 $\boldsymbol{G}_{zw}(s)$ 满足

$$\| \boldsymbol{G}_{zw}(s) \|_\infty < 1 \tag{4.6.5}$$

我们先来考虑系统(4.6.1)的鲁棒稳定问题。

在式(4.6.1a)中,令 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$,则得具有参数不确定性的自由系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}(t))\boldsymbol{x} \tag{4.6.6}$$

【定义 4.6.1】(二次稳定) 对自由系统(4.6.6),如果存在适当的 $\boldsymbol{P} > \boldsymbol{0}$ 和 $\alpha > 0$,使得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t) + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \leqslant -\alpha \| \boldsymbol{x}(t) \|^2, \forall t \tag{4.6.7}$$

沿方程(4.6.6)的任意解轨迹均成立,则称该系统是二次稳定的(Quadratically Stable)。

以上定义的系统(4.6.6)的二次稳定性,根据定理 1.4.3,意味着系统对于任意 $\boldsymbol{\Sigma}(t) \in \Omega$ 是指数稳定的。事实上,如果存在满足式(4.6.7)的 $\boldsymbol{P} > \boldsymbol{0}$,定义 Lyapunov 函数

$$V[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$$

且令

$$\gamma_1 = \underline{\sigma}(\boldsymbol{P}), \gamma_2 = \overline{\sigma}(\boldsymbol{P})$$

则有

(1) $\gamma_1 \| \boldsymbol{x}(t) \|^2 \leqslant V[\boldsymbol{x}(t)] \leqslant \gamma_2 \| \boldsymbol{x}(t) \|^2, \forall \boldsymbol{x}$。

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}(t) + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \leqslant -\alpha \| \boldsymbol{x}(t) \|^2, \forall t$。

并且,对任意初态 $\boldsymbol{x}(0)$,有

$$\| \boldsymbol{x}(t) \|^2 \leqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \| \boldsymbol{x}(0) \|^2 \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{\gamma_2}t}, \forall t \geqslant 0, \forall \boldsymbol{\Sigma} \in \Omega$$

【定理 4.6.1】 自由系统(4.6.6)是二次稳定的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$ 稳定,且

$$\| \boldsymbol{F}_a(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{E} \|_\infty < 1 \tag{4.6.8}$$

【证明】 仅证充分性。设 $\boldsymbol{A}$ 为稳定阵且式(4.6.8)成立。由定理 4.3.9 存在矩阵 $\boldsymbol{P} > \boldsymbol{0}$,使得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a < \boldsymbol{0}$$

成立。令

$$\boldsymbol{Q} = -(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a) > \boldsymbol{0}$$

则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a)\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \leqslant \\
&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}_a\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \\
&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}_a)\boldsymbol{x} \leqslant \\
&-\alpha \| \boldsymbol{x} \|^2, \forall \boldsymbol{\Sigma} \in \Omega
\end{aligned}$$

其中 α 为满足

$$\alpha \leqslant \underline{\sigma}(Q)$$

的任意常数。故由定义 4.6.1,系统(4.6.6)是二次稳定的。

定理的必要性的证明需要两个引理,过程较繁。详见文献[19]。 **证毕**

接下来讨论对于给定的具有参数不确定性的被控对象,利用定理 4.6.1 来设计使闭环系统为二次稳定的状态反馈控制器的问题。即参数不确定系统的鲁棒镇定问题。

在不确定性模型(4.6.1a)中,取 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}, \Delta \boldsymbol{B}_2(t)=\boldsymbol{0}$,得

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{A} + \Delta \boldsymbol{A}(t)]\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{u} \tag{4.6.9}$$

对上述被控对象,设计状态反馈控制律(4.6.4),使闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{A}(t)]\boldsymbol{x} \tag{4.6.10}$$

为二次稳定。称为不确定系统(4.6.9)的鲁棒镇定问题。

根据定理 4.6.1,闭环系统(4.6.10)为二次稳定的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}$ 稳定,且

$$\| \boldsymbol{F}_a(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{E} \|_\infty < 1 \tag{4.6.11}$$

成立。

考虑广义被控对象

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{F}_a & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{4.6.12}$$

则容易验证,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}$ 稳定,且式(4.6.11)成立等价于对广义被控对象(4.6.12),设计状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$,使其闭环内稳定,且式(4.6.11)成立。即系统(4.6.9)的二次镇定控制器设计问题等价于广义系统(4.6.12)的基于状态反馈的 H_∞ 标准控制问题。

根据定理 4.4.2,有如下定理。

【定理 4.6.2】 对不确定性系统(4.6.9),存在状态反馈控制律(4.6.4),使得闭环系统为二次稳定的充分必要条件是存在适当的正数 $\varepsilon>0$,使得 Riccati 不等式

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\varepsilon^2}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a < \boldsymbol{0} \tag{4.6.13}$$

有解 $\boldsymbol{P}>\boldsymbol{0}$。若上式有解,则使闭环系统二次稳定的控制器由下式给出

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{2\varepsilon^2}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \tag{4.6.14}$$

下面,我们考虑在模型(4.6.9)中 $\Delta \boldsymbol{B}_2(t) \neq \boldsymbol{0}$ 的情况。即考虑系统阵和输入阵中同时存在不确定性的情况。

设不确定性模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{A} + \Delta \boldsymbol{A}(t)]\boldsymbol{x} + [\boldsymbol{B}_2 + \Delta \boldsymbol{B}_2(t)]\boldsymbol{u} \tag{4.6.15}$$

其中不确定性矩阵 $\Delta \boldsymbol{A}(t)$ 和 $\Delta \boldsymbol{B}_2(t)$ 满足式(4.6.2)的匹配条件。

对式(4.6.15)的被控对象,考虑式(4.6.4)的状态反馈控制律,则闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}(t)(\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_b\boldsymbol{K})]\boldsymbol{x} \tag{4.6.16}$$

同理根据定理 4.6.1,系统(4.6.16)为二次稳定的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}$ 稳定,且

$$\| (\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_b\boldsymbol{K})(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{E} \|_\infty < 1 \tag{4.6.17}$$

成立。

与定理 4.6.2 的处理方法类似，状态反馈阵 K 可以通过求解广义被控对象

$$G(s)=\begin{bmatrix} A & E & B_2 \\ F_a & 0 & F_b \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6.18}$$

的 H_∞ 标准控制问题而得到。

根据定理 4.4.1，有如下定理。

【定义 4.6.3】 设 F_b 列满秩。对不确定性系统(4.6.15)，存在状态反馈控制律(4.6.4)，使得闭环系统为二次稳定的充分必要条件为 Riccati 不等式

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + PEE^{\mathrm{T}}P + F_a^{\mathrm{T}}F_a - (PB_2 + F_a^{\mathrm{T}}F_b)(F_b^{\mathrm{T}}F_b)^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}P + F_b^{\mathrm{T}}F_a) < 0 \tag{4.6.19}$$

有解 $P>0$。若上式有解，则使闭环系统二次稳定的控制器由下式给出

$$K = -(F_b^{\mathrm{T}}F_b)^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}P + F_b^{\mathrm{T}}F_a) \tag{4.6.20}$$

最后，我们考虑具有参数不确定性的系统(4.6.1)的鲁棒 H_∞ 性能设计问题，即求解问题 4.6.1。为推导简单，如下正交性假设条件成立。

$\mathrm{A_1}$) $D^{\mathrm{T}}[D \quad C]=[I \quad 0]$

由式(4.6.1)和式(4.6.4)构成的闭环系统可以表示为

$$\dot{x} = (A_K + \Delta A_K)x + B_1 w \tag{4.6.21a}$$

$$z = C_K x \tag{4.6.21b}$$

其中，$A_K = A + B_2K, C_K = C + DK, \Delta A_K = E\Sigma F_K, F_K = F_a + F_bK$。根据定理 4.3.9 可知，如果存在适当的 $P>0$，使得

$$(A_K + \Delta A_K)^{\mathrm{T}}P + P(A_K + \Delta A_K) + PB_1B_1^{\mathrm{T}}P + C_K^{\mathrm{T}}C_K < 0 \tag{4.6.22}$$

对任意的 $\Sigma \in \Omega$ 成立，则闭环系统(4.6.21)满足问题 4.6.1 中的鲁棒 H_∞ 性能准则(1)和(2)。

【引理 4.6.1】[19] 存在正定阵 $P>0$，使得

$$(A + E\Sigma F_a)^{\mathrm{T}}P + P(A + E\Sigma F_a) + PBB^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}C < 0, \forall \Sigma \in \Omega \tag{4.6.23}$$

成立的充分必要条件为存在标量 $\lambda>0$ 满足

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(BB^{\mathrm{T}} + \lambda^2 EE^{\mathrm{T}})P + C^{\mathrm{T}}C + \frac{1}{\lambda^2}F_a^{\mathrm{T}}F_a < 0 \tag{4.6.24}$$

下面的定理给出了状态反馈阵 K 使式(4.6.22)存在 $P>0$ 的充分必要条件及 K 的求法。

【定理 4.6.4】 在假设($\mathrm{A_1}$)下，对给定的被控对象(4.6.1)和(4.6.2)，存在状态反馈阵 K，使得式(4.6.22)对任意 $\Sigma \in \Omega$ 均存在解 $P>0$ 的充分必要条件为存在标量 $\lambda>0$，使得 Riccati 不等式

$$\begin{aligned} &A^{\mathrm{T}}P + PA + P(B_1B_1^{\mathrm{T}} + \lambda^2 EE^{\mathrm{T}})P + C^{\mathrm{T}}C + \frac{1}{\lambda^2}F_a^{\mathrm{T}}F_a - \\ &(PB_2 + \frac{1}{\lambda^2}F_a^{\mathrm{T}}F_b)R^{-2}(B_2^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\lambda^2}F_b^{\mathrm{T}}F_a) < 0 \end{aligned} \tag{4.6.25}$$

有解 $P>0$，其中 $R^2 = I + \lambda^{-2}F_b^{\mathrm{T}}F_b$。若式(4.6.25)有解，则使闭环系统满足鲁棒 H_∞ 性能准则(1)和(2)的状态反馈阵，由下式给出

$$K = -R^{-2}(B_2^{\mathrm{T}}P + \lambda^{-2}F_b^{\mathrm{T}}F_a) \tag{4.6.26}$$

【证明】 必要性。设存在 K 和 $P>0$，使得式(4.6.22)成立。由引理 4.6.1，存在适当的

$\lambda>0$,使得

$$A_K^{\mathrm{T}}P + PA_K + P(B_1B_1^{\mathrm{T}} + \lambda^2EE^{\mathrm{T}})P + C_K^{\mathrm{T}}C_K + \frac{1}{\lambda^2}F_K^{\mathrm{T}}F_K < 0 \tag{4.6.27}$$

成立。将 A_K、C_K 和 F_K 代入上式,整理得

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(B_1B_1^{\mathrm{T}} + \lambda^2EE^{\mathrm{T}})P + C^{\mathrm{T}}C + \frac{1}{\lambda^2}F_a^{\mathrm{T}}F_a + (PB_2 + \frac{1}{\lambda^2}F_a^{\mathrm{T}}F_b)K +$$

$$K^{\mathrm{T}}(B_2^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\lambda^2}F_b^{\mathrm{T}}F_a) + K^{\mathrm{T}}(I + \frac{1}{\lambda^2}F_b^{\mathrm{T}}F_b)K < 0$$

故

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(B_1B_1^{\mathrm{T}} + \lambda^2EE^{\mathrm{T}})P + C^{\mathrm{T}}C + \frac{1}{\lambda^2}F_a^{\mathrm{T}}F_a - (PB_2 + \frac{1}{\lambda^2}F_a^{\mathrm{T}}F_b)R^{-2}(B_2^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\lambda^2}F_b^{\mathrm{T}}F_a) <$$

$$-\{K + R^{-2}(B_2^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\lambda^2}F_b^{\mathrm{T}}F_a)\}^{\mathrm{T}}R^2\{K + R^{-2}(B_2P + \frac{1}{\lambda^2}F_b^{\mathrm{T}}F_a)\} \leqslant 0 \tag{4.6.28}$$

显然,P 满足 Riccati 不等式(4.6.25)。

充分性。设存在适当的 $\lambda>0$,使得 Riccati 不等式(4.6.25)有正定解 $P>0$。利用此解 $P>0$和 λ 构造K 如式(4.6.26)。则由式(4.6.25)和恒等式

$$K + R^{-2}(B_2^{\mathrm{T}}P + \lambda^{-2}F_b^{\mathrm{T}}F_a) = 0$$

得

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(B_1B_1^{\mathrm{T}} + \lambda^2EE^{\mathrm{T}})P + C^{\mathrm{T}}C + \frac{1}{\lambda^2}F_a^{\mathrm{T}}F_a -$$

$$(PB_2 + \frac{1}{\lambda^2}F_a^{\mathrm{T}}F_b)R^{-2}(B_2^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\lambda^2}F_b^{\mathrm{T}}F_a) + \{K + R^{-2}(B_2^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\lambda^2}F_b^{\mathrm{T}}F_a)\}^{\mathrm{T}}$$

$$R^2\{K + R^{-2}(B_2^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\lambda^2}F_b^{\mathrm{T}}F_a)\} < 0$$

由于上式即为式(4.6.28),所以由引理 4.6.1 可知,式(4.6.22)对于任意的 $\boldsymbol{\Sigma}\in\Omega$ 成立。

证毕

定理 4.6.4 表明,若对于适当选取的 $\lambda>0$,Riccati 不等式(4.6.25)存在正定解 $P>0$,则使闭环系统满足鲁棒 H_∞ 性能准则的控制律可按式(4.6.26)求出。

以上定理中,如果 $\Delta B_2=0$,则可取 $F_b=0$。此时,有如下推论。

【推论 4.6.1】 设假设(A_1)成立且 $F_b=0$。对于给定的被控对象(4.6.1),如果存在标量 $\lambda>0$,使得 Riccati 不等式

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(B_1B_1^{\mathrm{T}} + \lambda^2EE^{\mathrm{T}} - B_2B_2^{\mathrm{T}})P + C^{\mathrm{T}}C + \frac{1}{\lambda^2}F_a^{\mathrm{T}}F_a < 0 \tag{4.6.29}$$

有正定解 $P>0$,则使闭环系统满足鲁棒 H_∞ 性能准则(1)、(2)的状态反馈控制器由下式给出

$$K = -B_2^{\mathrm{T}}P \tag{4.6.30}$$

以上讨论的参数不确定系统的鲁棒 H_∞ 控制问题,其参数不确定性(ΔA,ΔB_2)均为线性的。关于参数不确定性为非线性的情形,文献[19]中做了较详尽的讨论,读者可参阅文献[19]或参阅本书 5.4 节关于非线性不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制问题的讨论。

4.7 可靠 H_∞ 控制

上节我们讨论了参数不确定系统的 H_∞ 控制问题,称之为鲁棒 H_∞ 控制。本节我们将从另外一个角度来考虑当系统中存在不确定性时的 H_∞ 控制问题,称之为可靠 H_∞ 控制。此时的不确定性表现为控制系统中的传感器或执行器的故障。当一部分传感器或执行器发生故障(失效)时,系统的模型将要发生变化,引进了不确定性。由于这种不确定性是由于控制系统中元器件故障所引起的,故相应的 H_∞ 控制问题称为可靠 H_∞ 控制问题。我们将看到可靠 H_∞ 控制对不确定性的描述不同于参数不确定性的描述,因此,在具体处理方法上也将有所不同。

图 4.7.1(a)为基本的广义控制系统。$G(s)$为广义被控对象,$K(s)$为 2×2 维控制器,z 为被控输出,w_0 为外部干扰信号,y_1、y_2 为量测输出,w_1、w_2 为量测噪声,u_1、u_2 为控制信号。

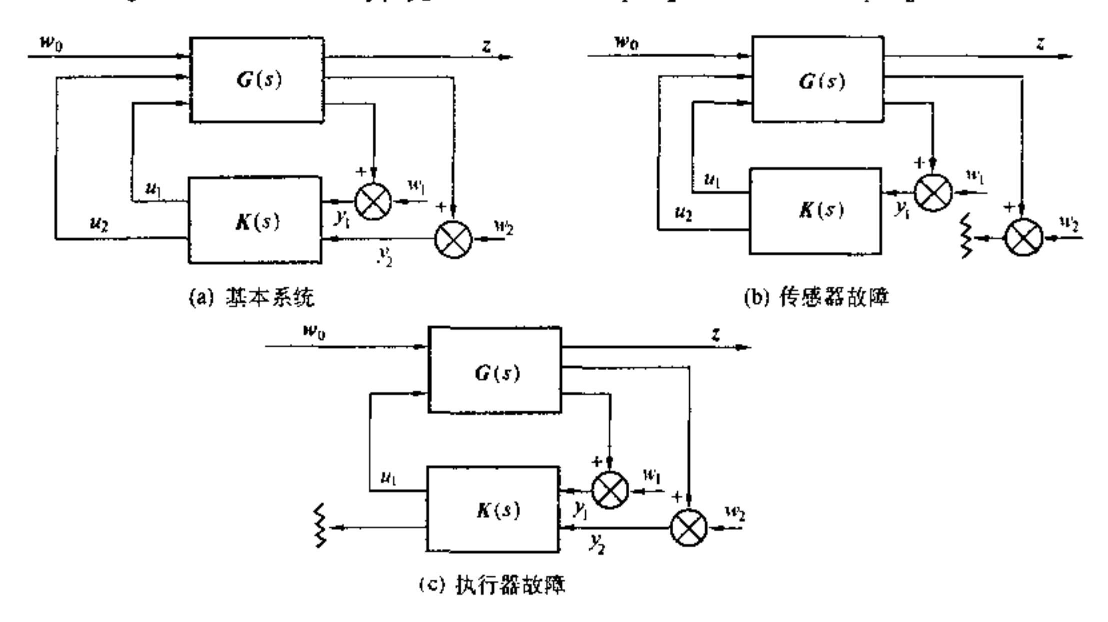


图 4.7.1 故障模式

当 #2 号传感器发生故障时,相应的模型描述如图 4.7.1(b)所示。相当于量测信号 $y_2=0$。

当 #2 号执行器发生故障时,相应的模型描述如图 4.7.1(c)所示。相当于控制信号 $u_2=0$。

当然,容易发生故障(易失效)的传感器或执行器对控制系统的镇定设计必须是冗余的,它们的存在只是为了改善系统的性能。

本节的讨论将用到基于状态观测器的 H_∞ 控制器的设计方法,为此,我们先对这一问题做一简单介绍。

4.7.1 基于观测器的 H_∞ 控制器设计

考虑线性时不变被控对象

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw_0 \tag{4.7.1a}$$

$$y = Cx + w \tag{4.7.1b}$$

$$z = \begin{bmatrix} Hx \\ u \end{bmatrix} \tag{4.7.1c}$$

其中 x 为状态，y 为量测输出，z 为被控输出，w_0、w 为平方可积干扰输入，u 为控制输入。假设(A,H)能检测。

对于系统(4.7.1)，当全部状态均可以直接量测时，我们当然可以设计状态反馈控制律 $u=Kx$来镇定系统上且使其满足 H_∞性能指标，正如 4.4 节所做的那样。然而，在许多实际控制问题中，状态变量不是全部能量测的，甚至于有些状态变量是为了系统分析与设计的方便而虚构的。这样，一个很自然的问题就是如何利用系统的输入输出信息对系统实现状态重构，这就是所谓的状态观测器设计。然后，根据状态观测器对状态的估值 $\hat{x}$，设计反馈控制律 $u=K\hat{x}$。本节我们考虑如下形式的全阶状态观测器

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G\hat{w}_0 + L(y - C\hat{x}) \tag{4.7.2}$$

其中 $\hat{x}$ 为状态的估值，其维数与 x 相同，L 为观测器增益阵，而

$$\hat{w}_0 = K_d\hat{x} \tag{4.7.3}$$

表示对于扰动输入的估值。K_d 为相应的增益阵。给定式(4.7.2)和式(4.7.3)，基于状态观测器的动态反馈控制律为

$$\dot{\hat{x}} = (A + BK + GK_d - LC)\hat{x} + Ly \tag{4.7.4a}$$

$$u = K\hat{x} \tag{4.7.4b}$$

其中三个增益阵 L、K、K_d 是待求的。

可求得，由式(4.7.4)和式(4.7.1)构成的增广闭环系统为

$$\dot{\bar{x}}_e = F_e\bar{x}_e + G_ew_e,\ z = H_e\bar{x}_e \tag{4.7.5}$$

其中 $\bar{x}_e^{\mathrm T} = (x^{\mathrm T}\quad \hat{x}^{\mathrm T})$，$w_e^{\mathrm T} = (w_0^{\mathrm T}\quad w^{\mathrm T})$，而

$$F_e = \begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A_a - LC \end{bmatrix},\ G_e = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix},\ H_e = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \tag{4.7.6}$$

这里 $A_a = A + BK + GK_d$。

对式(4.7.5)做非奇异变换 $\bar{x}_e = M_e\tilde{x}_e$，其中 $\tilde{x}_e^{\mathrm T} = (x^{\mathrm T}\quad e^{\mathrm T})$、$e = \hat{x} - x$ 为状态的估计误差，而变换阵

$$M_e = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \tag{4.7.7}$$

则得

$$\dot{\tilde{x}} = \widetilde{F}_e\tilde{x}_e + \widetilde{G}_ew_e,\ z = \widetilde{H}_e\tilde{x}_e \tag{4.7.8}$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_e &= M_e^{-1}F_eM_e = \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ GK_d & A_a - BK - LC \end{bmatrix} \\ \widetilde{G}_e &= M_e^{-1}G_e = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -G & L \end{bmatrix},\ \widetilde{H}_e = H_eM_e = \begin{bmatrix} H & 0 \\ K & K \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.7.9}$$

我们的目的是选择反馈增益阵 K、观测器增益阵 L 和干扰估计增益阵 K_d，使得闭环传函阵 $T(s) = H_e(sI - F_e)^{-1}G_e = \widetilde{H}_e(sI - \widetilde{F}_e)^{-1}\widetilde{G}_e$ 满足 $\|T(s)\|_\infty \leqslant \gamma$。为此，我们需要如下两个引理。

【引理 4.7.1】[66] 令 $T(s)=H(sI-F)^{-1}G$,其中(F,H)能检测,如果存在实矩阵 $X\geqslant 0$ 和一个正数 γ,满足

$$F^{T}x+xF+\frac{1}{\gamma^{2}}XGG^{T}X+H^{T}H\leqslant 0 \tag{4.7.10}$$

则 F 是稳定的,且 $T(s)$满足 $\|T(s)\|_{\infty}\leqslant\gamma$。

我们看到,该引理与 4.3 节的定理 4.3.9 是相似的,只是将不等号 > (<)改成了 ⩾ (⩽)。

【引理 4.7.2】[66] $(\widetilde{F}_{e},\widetilde{H}_{e})$是能检测的,如果以下两个条件成立:

(1) (A,H)是能检测的。

(2) $A_{\alpha}=A+BK+GK_{d}$ 是稳定的。

【定理 4.7.1】 假设(A,H)是能检测的,而

$$K=-B^{T}X,K_{d}=\frac{1}{\gamma^{2}}G^{T}X \tag{4.7.11}$$

其中 $X\geqslant 0$ 满足状态反馈设计 Riccati 方程

$$A^{T}X+XA+\frac{1}{\gamma^{2}}XGG^{T}X-XBB^{T}X+H^{T}H=0 \tag{4.7.12}$$

且 $A_{\alpha}=A+BK+GK_{d}$ 是稳定的。再假设

$$L=(I-\gamma^{-2}YX)^{-1}YC^{T} \tag{4.7.13}$$

其中 $Y>0$ 满足观测器设计 Riccati 方程

$$AY+YA^{T}+\frac{1}{\gamma^{2}}YH^{T}HY-YC^{T}CY+GG^{T}=0 \tag{4.7.14}$$

且 $\bar{\sigma}\{YX\}<\gamma^{2}$,则动态控制器(4.7.4)镇定广义被控对象(4.7.1)且闭环传函阵 $T(s)=H_{e}(sI-F_{e})^{-1}G_{e}$,满足 $\|T(s)\|_{\infty}\leqslant\gamma$。

【证明】 定义 $\widetilde{X}_{e}\geqslant 0$ 为

$$\widetilde{X}_{e}=\begin{bmatrix}X & 0\\ 0 & \gamma^{2}Y^{-1}-X\end{bmatrix} \tag{4.7.15}$$

则利用式(4.7.12)和式(4.7.14),经常规代数运算,可得

$$\widetilde{F}_{e}^{T}\widetilde{X}_{e}+\widetilde{X}_{e}\widetilde{F}_{e}+\frac{1}{\gamma^{2}}\widetilde{X}_{e}\widetilde{G}_{e}\widetilde{G}_{e}^{T}\widetilde{X}_{e}+\widetilde{H}_{e}^{T}\widetilde{H}_{e}=0 \tag{4.7.16}$$

其中 $\widetilde{F}_{e}$、$\widetilde{G}_{e}$ 和 $\widetilde{H}_{e}$ 由式(4.7.9)给定。根据定理中假设条件,由引理 4.7.2 可知,$(\widetilde{F}_{e},\widetilde{H}_{e})$能检测。因此,根据引理 4.7.1,$\widetilde{F}_{e}$ 稳定,且 $T(s)=\widetilde{H}_{e}(sI-\widetilde{F}_{e})^{-1}\widetilde{G}_{e}=H_{e}(sI-F_{e})^{-1}G_{e}$ 满足 $\|T(s)\|_{\infty}\leqslant\gamma$。 **证毕**

将式(4.7.9)的变换阵代入式(4.7.16),可得

$$M_{e}^{T}F_{e}^{T}M_{e}^{-T}\widetilde{X}_{e}+\widetilde{X}_{e}M_{e}^{-1}F_{e}M_{e}+\frac{1}{\gamma^{2}}\widetilde{X}_{e}M_{e}^{-1}G_{e}G_{e}^{T}M_{e}^{-T}\widetilde{X}_{e}+M_{e}^{T}H_{e}^{T}H_{e}M_{e}=0$$

上式两端左乘 M_{e}^{-T},右乘 M_{e}^{-1},则得

$$F_{e}^{T}M_{e}^{-T}\widetilde{X}_{e}M_{e}^{-1}+M_{e}^{-T}\widetilde{X}_{e}M_{e}^{-1}F_{e}+\frac{1}{\gamma^{2}}M_{e}^{-T}\widetilde{X}_{e}M_{e}^{-1}G_{e}G_{e}^{T}M_{e}^{-T}\widetilde{X}_{e}M_{e}^{-1}+H_{e}^{T}H_{e}=0$$

令 $X_{e}=M_{e}^{-T}\widetilde{X}_{e}M_{e}^{-1}$,则 $X_{e}\geqslant 0$,满足

$$F_{e}^{T}X_{e}+X_{e}F_{e}+\frac{1}{\gamma^{2}}X_{e}G_{e}G_{e}^{T}X_{e}+H_{e}^{T}H_{e}=0 \tag{4.7.17}$$

上式为式(4.7.16)的等价表示。

根据上面所得的一些结果，现阐述可靠 H_∞ 控制器设计的基本思想。

定理4.7.1给出的基于设计方程(4.7.17)(或方程(4.7.12)和(4.7.14))的控制器综合方法，保证了闭环稳定性和 H_∞ 范数界 $\|T\|_\infty \leqslant \gamma$ 成立，但对于控制元件失效未必是可靠的。但我们注意到，引理4.7.1的 $X_e \geqslant 0$ 只需满足不等式

$$F_e^T X_e + X_e F_e + \frac{1}{\gamma^2} X_e G_e G_e^T X_e + H_e^T H_e \leqslant 0 \tag{4.7.18}$$

对某设计问题，当 γ 大于其可达的最小界时，设计条件(4.7.18)可给出一簇控制器。这样，我们就可从这一簇控制器中选出一个具有所期望的可靠性质的控制器。这里所采用的方法是将设计条件(4.7.18)表达为

$$F_e^T X_e + X_e F_e + \frac{1}{\gamma^2} X_e G_e G_e^T X_e + H_e^T H_e + P_e = 0 \tag{4.7.19}$$

其中 $P_e \geqslant 0$ 是待定的。为了得到可靠控制器，基本思想是选择矩阵 P_e，使得闭环系统不但在所有控制元件正常工作时，而且在部分传感器或部分执行器失效时，引理4.7.1的假设条件均得到满足。其方法是首先确定控制元件失效所产生的系数矩阵 F_e、G_e 和 H_e 的摄动，然后，基于这一信息选择合适的 P_e。例如，如果一个控制器的设计必须容忍某种传感器失效，那么，就可得到对应于这种传感器失效的摄动阵 ΔF_e 和 ΔH_e。考虑摄动后，$F_e + \Delta F_e$、G_e 和 $H_e + \Delta H_e$ 就代表相应的量测值不存在(为零)时的系统矩阵。加、减适当的项，则条件(4.7.19)可表达为如下形式

$$\begin{aligned}&(F_e+\Delta F_e)^T X_e + X_e(F_e+\Delta F_e) + \frac{1}{\gamma^2} X_e G_e G_e^T X_e + (H_e+\Delta H_e)^T(H_e+\Delta H_e) = \\ &- P_e + \Delta F_e^T X_e + X_e \Delta F_e + H_e^T \Delta H_e^T + \Delta H_e^T H_e + \Delta H_e^T \Delta H_e\end{aligned} \tag{4.7.20}$$

确定某 $P_e \geqslant 0$，使得式(4.7.20)右端为非正定，则式(4.7.20)隐含

$$(F_e+\Delta F_e)^T X_e + X_e(F_e+\Delta F_e) + \frac{1}{\gamma^2} X_e G_e G_e^T X_e + (H_e+\Delta H_e)^T(H_e+\Delta H_e) \leqslant 0$$

所以，摄动后的系统满足引理4.7.1的基本假设条件。最后，对于所选的 $P_e \geqslant 0$，找到设计方程，使式(4.7.19)得到满足。

4.7.2 传感器失效的可靠 H_∞ 控制

我们先来考虑控制系统某些传感器失效时的可靠 H_∞ 控制器设计问题，下一小节再考虑某些执行器失效时的可靠 H_∞ 控制器设计问题。令 $\Omega \subseteq \{1,2,\cdots,\dim(y)\}$ 表示传感器中容易失效的部分，正如前面所述，这一部分对镇定系统而言是冗余的，但可用来改善系统性能。另一部分记为 $\bar{\Omega} \subseteq \{1,2,\cdots,\dim(y)\} - \Omega$，这一部分传感器不会失效。对输出矩阵 C 引入如下分解

$$C = C_\Omega + C_{\bar{\Omega}} \tag{4.7.21}$$

其中 C_Ω 和 $C_{\bar{\Omega}}$ 是按照 $\bar{\Omega}$ 和 Ω 将矩阵 C 的对应行置零而得到的。例如，$C_{\bar{\Omega}}$ 是将 C 中对应于容易失效的传感器的相应行置零而得到的。令 $\omega \subseteq \Omega$ 表示实际失效的一部分传感器，而 $T_{\bar{\omega}}(s)$ 表示所导致的闭环系统的传函阵。类似于分解式(4.7.21)，我们采用如下分解

$$C = C_\omega + C_{\bar{\omega}} \tag{4.7.22}$$

其中 C_ω 和 $C_{\bar{\omega}}$ 类似于 C_Ω 和 $C_{\bar{\Omega}}$ 对矩阵 C 的分解。由于 $\omega \subseteq \Omega$，所以有 $C_\omega^T C_\omega \leqslant C_\Omega^T C_\Omega$。我们也

对观测器增益阵 L 做分解

$$L = L_\omega + L_{\bar{\omega}} \tag{4.7.23}$$

使得

$$LC = L_\omega C_\omega + L_{\bar{\omega}} C_{\bar{\omega}} \tag{4.7.24}$$

即 $L_{\bar{\omega}}$是将 L 中对应于实际失效的传感器的相应列置零而得到的。

如果记 $\omega = \{r+1, r+2, \cdots, \dim(y)\}, r \leqslant \dim(y) = q$,则(4.7.22)和(4.7.23)两式的分解可分别表示为

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C_{r+1} \\ \vdots \\ C_q \end{bmatrix} = C_{\bar{\omega}} + C_\omega$$

$$L = [L_1, \cdots, L_r, 0, \cdots, 0] + [0, \cdots, 0, L_{r+1}, \cdots, L_q] = L_{\bar{\omega}} + L_\omega$$

可以证明本小节的如下主要定理。

【定理 4.7.2】 在定理 4.7.1 的所有假设条件和增益阵设计公式下,设 $X \geqslant 0$ 和 $Y > 0$ 分别满足如下 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}X + XA - XBB^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\gamma^2}XGG^{\mathrm{T}}X + H^{\mathrm{T}}H + \gamma^2 C_\Omega^{\mathrm{T}} C_\Omega = 0 \tag{4.7.25}$$

$$AY + YA^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\gamma^2}YH^{\mathrm{T}}HY - YC_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}}C_{\bar{\Omega}}Y + GG^{\mathrm{T}} = 0 \tag{4.7.26}$$

则,对于任意 $\omega \subseteq \Omega$ 的传感器失效,闭环系统是稳定的,且 $\| T_{\bar{\omega}} \|_\infty \leqslant \gamma$。

注 1 当 $\omega = \phi$,即所有传感器均正常工作时,$T_{\bar{\omega}}(s) = T(s)$为标称系统从 w_e 到 z 的闭环传函阵,其中

$$w_e = \begin{bmatrix} w_0 \\ w \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} Hx \\ u \end{bmatrix}$$

定理 4.7.2 涵盖了这一情形,因为 $\phi = \omega \subseteq \Omega$。当 $\omega \neq \phi$ 时,即有部分传感器失效时,则 $T_{\bar{\omega}}(s)$ 表示从 $w_{e\bar{\omega}}$到 z 的闭环传函阵,其中

$$w_{e\bar{\omega}} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_{\bar{\omega}} \end{bmatrix}$$

而 $w_{\bar{\omega}}$仅包含正常工作传感器所引进的量测噪声的分量。也就是说,我们所考虑的传感器失效的可靠控制问题实际上是将与失效传感器相关联的量测噪声取为零来处理。

注 2 设计方程(4.7.25)和(4.7.26)是将定理 4.7.1 的两个设计方程(4.7.12)和(4.7.14)中的系统矩阵 H 置换成如下的增广矩阵

$$H_+ = \begin{bmatrix} H \\ \gamma C_\Omega \end{bmatrix} \tag{4.7.27}$$

而得到的。这对应于选择式(4.7.19)中的矩阵 P_e 为

$$P_e = \gamma^2 \begin{bmatrix} C_\Omega^{\mathrm{T}} C_\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geqslant 0$$

【证明】 考虑到上面的注 2,如果式(4.7.25)和式(4.7.26)存在适当的解,则定理 4.7.1 保证了 $X_e \geq 0$ 满足

$$F_e^T X_e + X_e F_e + \frac{1}{\gamma^2} X_e G_e G_e^T X_e + H_{e+}^T H_{e+} = 0 \tag{4.7.28}$$

(参见式(4.7.17))且(F_e, H_{e+})能检测,其中增广闭环系统由如下矩阵描述

$$F_e = \begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A_a - LC \end{bmatrix}, G_e = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}, H_{e+} = \begin{bmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \tag{4.7.29}$$

而实际的无传感器失效的闭环系统矩阵由式(4.7.6)描述。

对于相应于 $\omega \subseteq \Omega$ 的传感器失效,动态控制器实际上成为

$$\dot{\hat{x}} = (A + BK + GK_d - LC)\hat{x} + L_{\bar{\omega}} y \tag{4.7.30a}$$

$$u = K\hat{x} \tag{4.7.30b}$$

我们看到,控制器的动态结构并未受到传感器失效的影响,只是控制器的输入结构被改变了。给定式(4.7.30),闭环系统矩阵成为

$$F_{e\bar{\omega}} = \begin{bmatrix} A & BK \\ L_{\bar{\omega}} C_{\bar{\omega}} & A_a - LC \end{bmatrix}, G_{e\bar{\omega}} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & L_{\bar{\omega}} \end{bmatrix}, H_e = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \tag{4.7.31}$$

由此,不难得到

$$F_e = F_{e\bar{\omega}} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_\omega \end{bmatrix} [C_\omega \quad 0] = F_{e\bar{\omega}} + L_{e\omega} C_{e\omega} \tag{4.7.32a}$$

$$G_e G_e^T = \begin{bmatrix} GG^T & 0 \\ 0 & L_{\bar{\omega}} L_{\bar{\omega}}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_\omega \end{bmatrix} [0 \quad L_\omega^T] = G_{e\bar{\omega}} G_{e\bar{\omega}}^T + L_{e\omega} L_{e\omega}^T \tag{4.7.32b}$$

$$H_{e+}^T H_{e+} = H_e^T H_e + \gamma^2 \begin{bmatrix} C_\Omega^T C_\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7.32c}$$

将式(4.7.32)代入式(4.7.28),并利用 $C_\Omega^T C_\Omega \geq C_\omega^T C_\omega$,不难得到

$$F_{e\bar{\omega}}^T X_e + X_e F_{e\bar{\omega}} + \frac{1}{\gamma^2} X_e G_{e\bar{\omega}} G_{e\bar{\omega}}^T X_e + H_e^T H_e = -C_{e\omega}^T L_{e\omega}^T X_e - X_e L_{e\omega} C_{e\omega} -$$

$$\frac{1}{\gamma^2} X_e L_{e\omega} L_{e\omega}^T X_e - \gamma^2 \begin{bmatrix} C_\Omega^T \\ 0 \end{bmatrix} (C_\Omega \quad 0) \leq$$

$$-C_{e\omega}^T L_{e\omega}^T X_e - X_e L_{e\omega} C_{e\omega} - \frac{1}{\gamma^2} X_e L_{e\omega} L_{e\omega}^T X_e - \gamma^2 C_{e\omega}^T C_{e\omega} =$$

$$-(\frac{1}{\gamma} X_e L_{e\omega} + \gamma C_{e\omega}^T)(\frac{1}{\gamma} L_{e\omega}^T X_e + \gamma C_{e\omega}) \leq 0$$

因此,如果$(F_{e\bar{\omega}}, H_e)$能检测,则由引理 4.7.1 可得,$F_{e\bar{\omega}}$是稳定的,且从 $w_{e\bar{\omega}}$到 z 的传函阵 $T_{\bar{\omega}}(s) = H_e(sI - F_{e\bar{\omega}})^{-1} G_{e\bar{\omega}}$满足 $\| T_{\bar{\omega}} \|_\infty \leq \gamma$。$(F_{e\bar{\omega}}, H_e)$能检测性的证明如下:如果 $v^T = (v_1^T \quad v_2^T) \neq 0$ 满足 $F_{e\bar{\omega}} v = \lambda v$ 和 $H_e v = 0$,则 $Av_1 = \lambda v_1$ 和 $Hv_1 = 0$,并且由已知条件,(A, H)能检测,因此 Re$(\lambda) < 0$ 或 $v_1 = 0$。如果 $v_1 = 0$,则由 $F_e v = F_{e\bar{\omega}} v = \lambda v$ 和 $H_e v = 0$,可推得 $H_{e+} v = 0$。因为(F_e, H_{e+})能检测,所以,Re$(\lambda) < 0$。

证毕

4.7.3 执行器失效的可靠 H_∞ 控制

令 $\Omega \subseteq \{1, 2, \cdots, \dim(u)\}$表示执行器中容易失效的部分,这一部分对镇定系统也是冗余

的。另一部分记为 $\bar{\Omega} \subseteq \{1,2,\cdots,\dim(u)\} - \Omega$，表示不会失效的执行器。对控制矩阵 B 引入分解

$$B = B_{\Omega} + B_{\bar{\Omega}} \tag{4.7.33}$$

其中 $B_{\bar{\Omega}}$ 是将 B 中对应于容易失效的执行器的相应列置零而得到的，B_{Ω} 可类似得出。令 $\omega \subseteq \Omega$ 表示实际失效的一部分执行器，而 $T_{\bar{\omega}}(s)$ 表示所导致的闭环系统的传函阵。引入如下分解

$$B = B_{\omega} + B_{\bar{\omega}} \tag{4.7.34}$$

其中 B_{ω} 和 $B_{\bar{\omega}}$ 类似于式(4.7.33)中 B_{Ω} 和 $B_{\bar{\Omega}}$ 对 B 的分解。由于 $\omega \subseteq \Omega$，所以有 $B_{\omega}B_{\omega}^{\mathrm{T}} \leqslant B_{\Omega}B_{\Omega}^{\mathrm{T}}$。对反馈增益阵 K 做相应的分解

$$K = K_{\omega} + K_{\bar{\omega}}$$

使得

$$BK = B_{\omega}K_{\omega} + B_{\bar{\omega}}K_{\bar{\omega}}$$

则对偶于定理 4.7.2，如下定理成立。

【定理 4.7.3】 在定理 4.7.1 的所有假设条件和增益阵设计公式下，设 $X \geqslant 0$ 和 $Y > 0$ 分别满足如下 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}X + XA - XB_{\bar{\Omega}}B_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\gamma^2}XGG^{\mathrm{T}}X + H^{\mathrm{T}}H = 0 \tag{4.7.35}$$

$$AY + YA^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\gamma^2}YH^{\mathrm{T}}HY - YC^{\mathrm{T}}CY + GG^{\mathrm{T}} + \gamma^2 B_{\Omega}B_{\Omega}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{4.7.36}$$

定义

$$G_{+} = [G \quad \gamma B_{\Omega}],\ K_{d+} = \frac{1}{\gamma^2}G_{+}^{\mathrm{T}}X \tag{4.7.37}$$

且将动态控制器修改为

$$\dot{\hat{x}} = (A + BK + G_{+}K_{d+} - LC)\hat{x} + Ly \tag{4.7.38a}$$

$$u = K\hat{x} \tag{4.7.38b}$$

设控制器(4.7.38)本身是开环内稳定的，则对于任意 $\omega \subseteq \Omega$ 的执行器失效，闭环系统是稳定的，且 $\| T_{\bar{\omega}} \|_{\infty} \leqslant \gamma$。

注 1 对于相应于 $\omega \subseteq \Omega$ 的执行器失效，$T_{\bar{\omega}}(s)$ 表示从 w_e 到 $z_{\bar{\omega}}$ 的传函阵，其中 $z_{\bar{\omega}}$ 仅包含与正常工作执行器相关的控制分量。也就是说，所考虑的执行器失效的可靠控制问题是将与失效执行器相应的控制信号从被控输出 z 中拿掉(等于零)，不参与 H_{∞} 范数的计算。

注 2 设计方程(4.7.35)和(4.7.36)是将定理 4.7.1 的两个设计方程(4.7.12)和(4.7.14)中的系统矩阵 G 置换成式(4.7.37)的增广矩阵 G_{+} 而得到的。这对应于选择式(4.7.19)中的矩阵 P_e 应为

$$P_e = X_e \begin{bmatrix} B_{\Omega}B_{\Omega}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X_e \geqslant 0$$

【证明】 考虑到注 2，如果式(4.7.35)和式(4.7.36)存在适当的解，则定理 4.7.1 保证了 $X_e \geqslant 0$ 满足

$$F_e^{\mathrm{T}}X_e + X_eF_e + \frac{1}{\gamma^2}X_eG_{e+}G_{e+}^{\mathrm{T}}X_e + H_e^{\mathrm{T}}H_e = 0 \tag{4.7.39}$$

且(F_e, H_e)能检测，其中增广闭环系统由如下矩阵描述

$$F_e = \begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A_a - LC \end{bmatrix}, G_{e+} = \begin{bmatrix} G_+ & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}, H_e = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \tag{4.7.40}$$

其中 $A_a = A + BK + G + K_{d+}$。而无执行器失效时的闭环系统矩阵由式(4.7.6)描述。

对于相应于 $\omega \subseteq \Omega$ 的执行器失效，控制器成为

$$\dot{\hat{x}} = (A + BK + G_+ K_{d+} - LC)\hat{x} + Ly \tag{4.7.41a}$$

$$u = K_{\bar{\omega}} \hat{x} \tag{4.7.41b}$$

给定式(4.7.41)，闭环系统矩阵成为

$$F_{e\bar{\omega}} = \begin{bmatrix} A & B_{\bar{\omega}}K_{\bar{\omega}} \\ LC & A_a - LC \end{bmatrix}, G_e = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}, H_{e\bar{\omega}} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & K_{\bar{\omega}} \end{bmatrix} \tag{4.7.42}$$

由此可得

$$F_e = F_{e\bar{\omega}} + \begin{bmatrix} B_\omega \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad K_\omega] = F_{e\bar{\omega}} + B_{e\omega}K_{e\omega} \tag{4.7.43a}$$

$$H_e^{\mathrm{T}} H_e = H_{e\bar{\omega}}^{\mathrm{T}} H_{e\bar{\omega}} + K_{e\omega}^{\mathrm{T}} K_{e\omega} \tag{4.7.43b}$$

$$G_{e+} G_{e+}^{\mathrm{T}} = G_e G_e^{\mathrm{T}} + \gamma^2 \begin{bmatrix} B_\Omega B_\Omega^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7.43c}$$

将式(4.7.43)代入式(4.7.39)，得

$$F_{e\bar{\omega}}^{\mathrm{T}} X_e + X_e F_{e\bar{\omega}} + \frac{1}{\gamma^2} X_e G_e G_e^{\mathrm{T}} X_e + H_{e\bar{\omega}}^{\mathrm{T}} H_{e\bar{\omega}} \leqslant -(X_e B_{e\omega} + K_{e\omega}^{\mathrm{T}})(B_{e\omega}^{\mathrm{T}} X_e + K_{e\omega}) \leqslant 0 \tag{4.7.44}$$

如果$(F_{e\bar{\omega}}, H_{e\bar{\omega}})$能检测，则引理 4.7.1 保证了 $F_{e\bar{\omega}}$是稳定的，且 $T_{\bar{\omega}}(s) = H_{e\bar{\omega}}(sI - F_{e\bar{\omega}})^{-1} G_e$ 满足 $\| T_{\bar{\omega}}(s) \|_\infty \leqslant \gamma$。为了证明能检测性，令 $v^{\mathrm{T}} = (v_1^{\mathrm{T}} \quad v_2^{\mathrm{T}}) \neq 0$ 满足 $F_{e\bar{\omega}} v = \lambda v$ 和 $H_{e\bar{\omega}} v = 0$，则 $Av_1 = \lambda v_1$ 和 $Hv_1 = 0$，且由已知条件(A, H)能检测。因此，$\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ 或 $v_1 = 0$。如果 $v_1 = 0$，则 $F_{e\bar{\omega}} v = \lambda v$ 给出

$$(A + BK + G_+ K_{d+} - LC) v_2 = \lambda v_2 \tag{4.7.45}$$

但由控制器本身是开环稳定的假设，$(A + BK + G_+ K_{d+} - LC)$是稳定的，所以，$\mathrm{Re}(\lambda) < 0$。

证毕

与定理 4.7.2 不同，定理 4.7.3 要求控制器本身是稳定的，以保证可靠的闭环稳定性。如果所设计的控制器不是稳定的，则可采用如下定理给出的强镇定控制器设计方法。

【定理 4.7.4】 在定理 4.7.1 的所有假设条件和设计方程下，令 $Y > 0$ 满足 Riccati 方程

$$YF^{\mathrm{T}} + FY + \frac{1}{\gamma^2} YH^{\mathrm{T}}HY - YC^{\mathrm{T}}CY + \frac{1}{\gamma^2} YK^{\mathrm{T}}KY + GG^{\mathrm{T}} + \gamma^2 BB^{\mathrm{T}} = 0 \tag{4.7.46}$$

其中 $F = A + BK$。则闭环系统是强稳定的（控制器本身是稳定的），且闭环传函阵满足 $\| T(s) \|_\infty \leqslant \gamma$。

该定理与定理 4.7.3 相结合，即可设计出开环稳定的动态控制器。

定理 4.7.4 的证明可参见文献[66]。

4.8 鲁棒可靠 H_∞ 控制

如果控制系统中存在的不确定性既有参数不确定性、又有由于控制元件失效所引进的不确定性,相应的 H_∞ 控制问题称之为鲁棒可靠 H_∞ 控制问题。

考虑如下状态空间方程描述的参数不确定线性系统

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + Bu(t) + Gw(t) \tag{4.8.1a}$$

$$z(t) = Cx(t) \tag{4.8.1b}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 是状态, $u \in \mathbf{R}^p$ 是控制输入, $w \in \mathbf{R}^r$ 是干扰输入,而 $z \in \mathbf{R}^m$ 是被控输出, A、B、G 和 C 是具有相应维数的标称系统定常矩阵。$\Delta A(\cdot)$是代表时变参数不确定性的实值矩阵函数,且具有下述形式

$$\Delta A(t) = DF(t)E \tag{4.8.2}$$

其中 $D \in \mathbf{R}^{n \times i}$、$E \in \mathbf{R}^{j \times n}$分别为已知常值矩阵,$F(t) \in \mathbf{R}^{i \times j}$为满足范数有界条件 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$ 的未知矩阵函数,且 $F(\cdot)$的元素 Lebesgue 可测。

与上节不同,本节我们假定系统的所有状态变量均是可量测的,均可用于状态反馈。也就是说,我们的目的是设计状态反馈控制律

$$u = -Kx(t) \tag{4.8.3}$$

来实现系统(4.8.1)的鲁棒可靠 H_∞ 控制,而且我们只考虑执行器失效的情况。

由于系统(4.8.1)中存在参数不确定性,类似于 4.6 节,我们需要如下不确定系统二次可镇定的概念。

【定义 4.8.1】(二次镇定) 给定 $\gamma > 0$。称不确定系统(4.8.1)为具有 H_∞ 范数界 γ 二次可镇定的,如果存在式(4.8.3)的线性状态反馈控制律和正定对称阵 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$,使得不等式

$$A_c^{\mathrm{T}}(t)P + PA_c(t) + \frac{1}{\gamma^2}PB_cB_c^{\mathrm{T}}P + C_c^{\mathrm{T}}C_c < 0 \tag{4.8.4}$$

对任意允许的(满足式(4.8.2))不确定性 $F(t)$成立。其中 $A_c(t)$、B_c 和 C_c 是闭环系统的状态空间实现。

与 4.6 节相类似,上述定义隐含如下结果。

【定理 4.8.1】[67] 设不确定系统(4.8.1)在式(4.8.3)的状态反馈下,为具有 H_∞ 范数界 γ 二次可镇定的。则闭环系统是一致渐近稳定的,而且在零初始条件 $x(0) = 0$ 下,有 $\|z\|_2 < \gamma\|w\|_2$对所有允许的不确定性 $F(t)$和所有非零 $w \in L_2[0, +\infty)$成立。

下面讨论不确定系统(4.8.1)在部分执行器失效时的鲁棒可靠 H_∞ 状态反馈控制器的设计问题。与式(4.7.33)和式(4.7.34)相同,对矩阵 B 引入如下分解

$$B = B_\Omega + B_{\bar{\Omega}}$$

$$B = B_\omega + B_{\bar{\omega}}$$

并假设$(A, B_{\bar{\Omega}})$能稳定。根据以上分解,不难得到如下事实

$$B_\Omega B_\Omega^{\mathrm{T}} = B_\omega B_\omega^{\mathrm{T}} + B_{\Omega-\omega}B_{\Omega-\omega}^{\mathrm{T}} \tag{4.8.5a}$$

$$B_{\bar{\Omega}}B_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}} = B_{\bar{\omega}}B_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}} + B_{\Omega-\omega}B_{\Omega-\omega}^{\mathrm{T}} \tag{4.8.5b}$$

值得注意的是,上节我们将失效的执行器的输出取为零来处理,而本节我们将其视为任意能量有界信号,即,失效执行器的输出属于 $L_2[0, +\infty)$,而把它看做是一种作用于被控对象的

干扰。这样,作用于被控对象上的总干扰就可以表达为

$$w_F = \begin{bmatrix} w \\ w_u \end{bmatrix}$$

其 $w_u \in \mathbf{R}^p$ 是由于对应的执行器失效而产生的干扰输入,它是将控制输入 u 中对应于正常工作执行器的元素置为零而得到的。

我们有如下主要定理。

【定理 4.8.2】 给定 $\gamma > 0$。对相应于任意 $\omega \subseteq \Omega$ 的执行器失效,不确定系统(4.8.1)是二次可镇定的,且在零初始条件下,被控输出 z 满足 $\| z \|_2 < \gamma \| w_F \|_2$,如果存在正数 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$,使得存在正定对称阵 $P > 0$ 满足如下 Riccati 方程

$$A^{\mathrm T}P + PA + \frac{1}{\gamma^2}P(GG^{\mathrm T} + B_\Omega B_\Omega^{\mathrm T})P + \delta PDD^{\mathrm T}P - \frac{1}{\varepsilon}PB_{\bar\Omega}B_{\bar\Omega}^{\mathrm T}P + \frac{1}{\delta}E^{\mathrm T}E + C^{\mathrm T}C + \varepsilon I = 0 \tag{4.8.6}$$

而且,相应的反馈控制律为

$$u(t) = -Kx(t), K = \frac{1}{2\varepsilon}B^{\mathrm T}P \tag{4.8.7}$$

【证明】 设存在正数 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$,使得 Riccati 方程(4.8.6)有正定解 $P > 0$。考虑对应于 $\omega \subseteq \Omega$ 的执行器失效,则不确定系统(4.8.1)可表示为

$$\dot x(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [G \quad B_\omega]w_F(t)B_{\bar\omega}u(t) \tag{4.8.8a}$$

$$z(t) = Cx(t) \tag{4.8.8b}$$

由于控制信号 $u(t)$只能通过正常执行器作用于被控对象,所以,式(4.8.8a)中的 $u(t)$应为

$$u(t) = -K_{\bar\omega}x(t), K_{\bar\omega} = \frac{1}{2\varepsilon}B_{\bar\omega}^{\mathrm T}P \tag{4.8.9}$$

将式(4.8.9)代入式(4.8.8a),则得闭环系统矩阵分别为

$$A_c(t) = A + DF(t)E - \frac{1}{2\varepsilon}B_{\bar\omega}B_{\bar\omega}^{\mathrm T}P \tag{4.8.10a}$$

$$B_c = [G \quad B_\omega] \tag{4.8.10b}$$

$$C_c = C \tag{4.8.10c}$$

根据如下事实

$$[\sqrt{\delta}PD - \frac{1}{\sqrt{\delta}}E^{\mathrm T}F^{\mathrm T}(t)][\sqrt{\delta}D^{\mathrm T}P - \frac{1}{\sqrt{\delta}}F(t)E] \geqslant 0$$

$$F^{\mathrm T}(t)F(t) \leqslant I$$

我们有

$$E^{\mathrm T}F^{\mathrm T}(t)D^{\mathrm T}P + PDF(t)E \leqslant \delta PDD^{\mathrm T}P + \frac{1}{\delta}E^{\mathrm T}E \tag{4.8.11}$$

根据式(4.8.10)和式(4.8.11),式(4.8.4)的左端小于或等于

$$A^{\mathrm T}P + PA + \frac{1}{\gamma^2}P(GG^{\mathrm T} + B_\omega B_\omega^{\mathrm T})P + \delta PDD^{\mathrm T}P - \frac{1}{\varepsilon}PB_{\bar\omega}B_{\bar\omega}^{\mathrm T}P + \frac{1}{\delta}E^{\mathrm T}E + C^{\mathrm T}C \tag{4.8.12}$$

最后,考虑到式(4.8.6)和式(4.8.5),我们得到

$$A_c^{\mathrm T}(t)P + PA_c(t) + \frac{1}{\gamma^2}PB_cB_c^{\mathrm T}P + C_c^{\mathrm T}C_c \leqslant$$

$$-\varepsilon I-(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\gamma^2})PB_{\Omega-\omega}B_{\Omega-\omega}^{\mathrm{T}}P<0 \tag{4.8.13}$$

证毕

定理 4.8.2 给出了不确定线性系统(4.8.1)的鲁棒和可靠 H_∞ 控制器存在的一个充分条件。这一条件就是 Riccati 方程(4.8.6)存在正定解 $P>0$。而 Riccati 方程(4.8.6)解的存在性依赖于参数的调整。关于适当选择参数 δ,以使式(4.8.6)存在正定解的方法,可参见文献[67]的引理 2。

4.9 鲁棒指数稳定问题

本节及下节所讨论的内容可看做为本章前几节得到的 H_∞ 标准控制问题有关结论的具体应用。

回顾 2.6 节关于具有指定衰减度的 LQR 问题,闭环系统的解 $x^*(t)$ 以不小于规定的速度趋于平衡点。本节讨论同时具有参数不确定性和未建模动态的系统的具有指定衰减度的鲁棒稳定问题,或称为鲁棒指数稳定问题,并将这种类型的不确定系统的上述鲁棒指数稳定问题转化为某个适当定义的标称系统的 H_∞ 标准控制问题。然后,通过求解这个 H_∞ 标准控制问题,即可得到鲁棒指数稳定问题的解。

首先,考虑上述不确定系统的鲁棒指数稳定问题,然后,再讨论其鲁棒镇定问题。

给定如下形式的系统

$$\dot{x}=(A+E\Sigma(t)F)x+Bw \tag{4.9.1a}$$

$$z=Cx \tag{4.9.1b}$$

$$w=\Delta(s)z \tag{4.9.1c}$$

其中 A、B、C、E 和 F 为已知定常阵,$\Sigma(t)$ 为未知参数摄动阵,并属于如下定义的集合

$$\Omega=\{\Sigma(t)\mid\Sigma^{\mathrm{T}}(t)\Sigma(t)\leqslant I,\forall t\} \tag{4.9.2}$$

$\Delta(s)$ 为未建模动态,并属于如下集合

$$BH_\infty=\{\Delta(s)\mid\Delta(s)\in BH_\infty,\|\Delta(s)\|_\infty\leqslant 1\} \tag{4.9.3}$$

【定理 4.9.1】 对于任意给定的 $\Delta(s)\in BH_\infty$,如果存在适当的标量 $\lambda>0$,使得 Riccati 不等式

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+PBB^{\mathrm{T}}P+\lambda^2PEE^{\mathrm{T}}P+C^{\mathrm{T}}C+\frac{1}{\lambda^2}F^{\mathrm{T}}F<0 \tag{4.9.4}$$

具有正定解 $P>0$,则存在标量 $\alpha>0,\beta>0$,使得系统(4.9.1)对于任意初始状态 $x(0)$ 的响应满足

$$\|x(t)\|^2\leqslant\alpha\|x(0)\|^2\mathrm{e}^{-\beta t},\forall t\geqslant 0,\forall\Sigma\in\Omega \tag{4.9.5}$$

【证明】 设 $\Delta(s)\in BH_\infty$ 具有以下状态空间实现

$$\dot{x}_\Delta=A_\Delta x_\Delta+B_\Delta z \tag{4.9.6a}$$

$$w=C_\Delta x_\Delta \tag{4.9.6b}$$

即 $\Delta(s)=C_\Delta(sI-A_\Delta)^{-1}B_\Delta$,则根据定理 4.3.9,存在相应的正定阵 $Q>0$,使得

$$A_\Delta^{\mathrm{T}}Q+QA_\Delta+QB_\Delta B_\Delta^{\mathrm{T}}Q+C_\Delta^{\mathrm{T}}C_\Delta=-M<0 \tag{4.9.7}$$

其中 M 为定常矩阵。

令 $x_c^{\mathrm{T}}=[x^{\mathrm{T}}\quad x_\Delta^{\mathrm{T}}]$，则得系统(4.9.1)的状态空间实现如下

$$\dot{x}_c=[A_c+E_c\Sigma(t)F_c]x_c \tag{4.9.8}$$

其中

$$A_c=\begin{bmatrix}A & BC_\Delta\\ B_\Delta C & A_\Delta\end{bmatrix},E_c=\begin{bmatrix}E\\ 0\end{bmatrix},F_c=[F\quad 0]$$

由定理 1.4.3 可知，我们只需证明对于任意给定的 $\Delta(s)\in BH_\infty$，存在 Lyapunov 函数 $V(x_c)$及 $\varepsilon>0$ 满足

$$\dot{V}(x_c)\leqslant-\varepsilon\|x_c(t)\|^2,\forall t\geqslant 0,\forall\Sigma\in\Omega \tag{4.9.9}$$

假设存在适当的 $\lambda>0$ 和 $P>0$ 满足式(4.9.4)。令

$$N=-\left(A^{\mathrm{T}}P+PA+PBB^{\mathrm{T}}P+\lambda^2PEE^{\mathrm{T}}P+C^{\mathrm{T}}C+\frac{1}{\lambda^2}F^{\mathrm{T}}F\right)>0 \tag{4.9.10}$$

利用上述的 $Q>0$ 和 $P>0$，定义正定阵 X 如下

$$X=\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix}$$

并定义

$$V(x_c)=x_c^{\mathrm{T}}(t)Xx_c(t)$$

则有

$$\dot{V}(x_c)=\dot{x}_c^{\mathrm{T}}Xx_c+x_c^{\mathrm{T}}X\dot{x}_c=x_c^{\mathrm{T}}(A_c^{\mathrm{T}}X+XA_c)x_c+2x_c^{\mathrm{T}}E_c\Sigma(t)F_cx_c \tag{4.9.11}$$

另一方面，令

$$S=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{12}^{\mathrm{T}} & S_{22}\end{bmatrix}=A_c^{\mathrm{T}}X+XA_c+\lambda^2XE_cE_c^{\mathrm{T}}X+\frac{1}{\lambda^2}F_c^{\mathrm{T}}F_c \tag{4.9.12}$$

则对任意 $\xi\in\mathbf{R}^{n+p}(x\in\mathbf{R}^n,x_\Delta\in\mathbf{R}^p)$，有

$$\begin{aligned}\xi^{\mathrm{T}}S\xi&=[\xi_1^{\mathrm{T}}\quad\xi_2^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{12}^{\mathrm{T}} & S_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=\\ &\xi_1^{\mathrm{T}}S_{11}\xi_1+2\xi_1^{\mathrm{T}}S_{12}\xi_2+\xi_2^{\mathrm{T}}S_{22}\xi_2\end{aligned} \tag{4.9.13}$$

其中

$$S_{11}=A^{\mathrm{T}}P+PA+\lambda^2PEE^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\lambda^2}F^{\mathrm{T}}F$$

$$S_{12}=C^{\mathrm{T}}B_\Delta^{\mathrm{T}}Q+PBC_\Delta$$

$$S_{22}=A_\Delta^{\mathrm{T}}Q+QA_\Delta$$

将式(4.9.7)和式(4.9.10)代入式(4.9.13)，得

$$\begin{aligned}\xi^{\mathrm{T}}S\xi=&\xi_1^{\mathrm{T}}(-N-PBB^{\mathrm{T}}P-C^{\mathrm{T}}C)\xi_1+2\xi_1^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}B_\Delta^{\mathrm{T}}Q\xi_2+\\ &2\xi_1^{\mathrm{T}}PBC_\Delta\xi_2-\xi_2^{\mathrm{T}}(M+QB_\Delta B_\Delta^{\mathrm{T}}Q+C_\Delta^{\mathrm{T}}C_\Delta)\xi_2=\\ &-\xi_1^{\mathrm{T}}N\xi_2-\xi_2^{\mathrm{T}}M\xi_2-(\xi_1^{\mathrm{T}}PB-\xi_2^{\mathrm{T}}C_\Delta^{\mathrm{T}})(B^{\mathrm{T}}P\xi_1-C_\Delta\xi_2)-\\ &(\xi_1^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}-\xi_2^{\mathrm{T}}QB_\Delta)(C\xi_1-B_\Delta^{\mathrm{T}}Q\xi_2)\leqslant-\varepsilon\|\xi\|^2\end{aligned} \tag{4.9.14}$$

其中

$$\varepsilon=\min\{\underline{\sigma}(N),\underline{\sigma}(M)\}$$

故

$$S \leqslant -\varepsilon I \tag{4.9.15}$$

将上式代入式(4.9.11),则容易推得

$$\dot{V}(x_c) \leqslant -\varepsilon \| x_c(t) \|^2, \forall t, \forall \Sigma \in \Omega \tag{4.9.16}$$

成立。 **证毕**

根据定理 4.3.9,定理 4.9.1 的条件,即式(4.9.4)有正定解,等价于

$$\left\| \begin{bmatrix} C \\ \frac{1}{\lambda}F \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} [B \quad \lambda E] \right\|_\infty < 1 \tag{4.9.17}$$

且 A 为稳定阵。因此,我们可以通过求解适当的 H_∞ 标准控制问题来求使闭环系统具有指定衰减度的鲁棒稳定控制器,即鲁棒指数镇定控制器的设计问题。为此,考虑如下被控系统

$$\dot{x} = (A + E\Sigma(t)F_a)x + B_1 w + (B_2 + E\Sigma(t)F_b)u \tag{4.9.18a}$$

$$z = C_1 x + D_{12} u \tag{4.9.18b}$$

$$y = C_2 x + D_{21} w \tag{4.9.18c}$$

$$w = \Delta(s) z \tag{4.9.18d}$$

其中 $\Sigma(t) \in \Omega, \Delta(s) \in BH_\infty$。

对上述被控系统,我们考虑动态输出反馈控制器

$$u = K(s) y \tag{4.9.19}$$

使得闭环系统对于任意 $\Delta(s) \in BH_\infty$ 鲁棒指数稳定。设 $K(s)$ 的状态空间实现如下

$$\dot{\eta} = A_c \eta + B_c y \tag{4.9.20a}$$

$$u = C_c \eta \tag{4.9.20b}$$

令 $x_c^{\mathrm{T}} = [x^{\mathrm{T}} \quad \eta^{\mathrm{T}}]$,则可以求得闭环系统(4.9.18)和(4.9.20)的状态空间描述如下

$$\dot{x}_c = (\hat{A} + \hat{E}\Sigma(t)\hat{F})x_c + \hat{B}w \tag{4.9.21a}$$

$$z = \hat{C} x_c \tag{4.9.21b}$$

$$w = \Delta(s) z \tag{4.9.21c}$$

其中

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_c D_{21} \end{bmatrix}, \hat{C} = [C_1 \quad D_{12} C_c]$$

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{F} = [F_a \quad F_b C_c]$$

闭环系统(4.9.21)在形式上与式(4.9.1)是相同的。根据定理 4.9.1,可以通过解适当的 H_∞ 标准控制问题而求得满足要求的控制器。为此,对于给定的被控对象(4.9.18),定义标称广义被控对象如下

$$P_\lambda(s) = \begin{bmatrix} A & [B_1 \quad \lambda E] & B_2 \\ \begin{bmatrix} C_1 \\ \frac{1}{\lambda}F_a \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} D_{12} \\ \frac{1}{\lambda}F_b \end{bmatrix} \\ C_2 & [D_{21} \quad 0] & 0 \end{bmatrix} \tag{4.9.22}$$

其中 $\lambda>0$ 为待定系数。

【定理 4.9.2】 如果存在标量 $\lambda>0$,使得以 $\boldsymbol{P}_\lambda(s)$ 为广义被控对象的 H_∞ 标准控制问题有解(4.9.20),则闭环系统(4.9.21)对于任意 $\boldsymbol{\Delta}(s)\in BH_\infty$ 是鲁棒指数稳定的。

【证明】 根据定理 4.9.1 可知,闭环系统(4.9.21)对于任意 $\boldsymbol{\Delta}(s)\in RH_\infty$ 是鲁棒指数稳定的充分条件是存在适当的标量 $\lambda>0$,使得 Riccati 方程

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\lambda^2\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{E}}\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\hat{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{C}}+\frac{1}{\lambda^2}\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{F}}<\boldsymbol{0} \tag{4.9.23}$$

具有正定解 $\boldsymbol{P}>\boldsymbol{0}$。

另一方面,可求得,由广义被控对象(4.9.22)和控制器(4.9.20)构成的闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}=\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\xi}+[\hat{\boldsymbol{B}}\quad \lambda\hat{\boldsymbol{E}}]\boldsymbol{w}' \tag{4.9.24a}$$

$$\boldsymbol{z}'=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{C}}\\ \frac{1}{\lambda}\hat{\boldsymbol{F}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi} \tag{4.9.24b}$$

所以,如果控制器(4.9.20)是广义被控对象 $\boldsymbol{P}_\lambda(s)$ 所对应的 H_∞ 标准控制问题的解,那么,系统(4.9.24)内稳定,且

$$\|\boldsymbol{G}_{z'w'}(s)\|_\infty<1 \tag{4.9.25}$$

成立。其中

$$\|\boldsymbol{G}_{z'w'}(s)\|_\infty=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{C}}\\ \frac{1}{\lambda}\hat{\boldsymbol{F}}\end{bmatrix}(s\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{A}})^{-1}[\hat{\boldsymbol{B}}\quad \lambda\hat{\boldsymbol{E}}]$$

故由定理 4.3.9 可得,对于该 $\lambda>0$,Riccati 不等式(4.9.23)具有正定解 $\boldsymbol{P}>\boldsymbol{0}$。 **证毕**

【例 4.9.1】 考虑图 4.9.1 所示系统,其中被控对象 $P(s)$ 的状态空间实现为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1+0.4\delta(t)\\ -2 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0.2\delta(t)\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$v=[1\quad 5]x$$

$\delta(t)$ 为不确定参数摄动,$\Delta(s)$ 为未建模动态,假设 $|\delta(t)|<1,\forall t$,且 $\Delta_p(s)\in RH_\infty$,$\|\Delta_p(s)\|_\infty<0.4$。

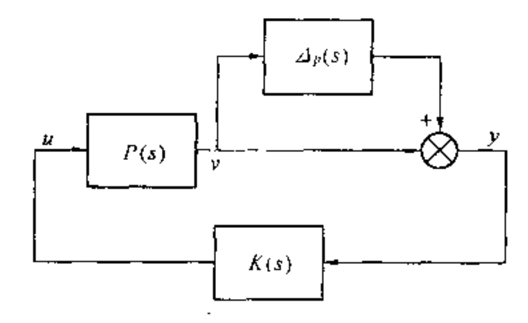


图 4.9.1 不确定系统

令 $\Sigma(t)=\delta(t),\Delta(s)=2.5\Delta_P(s)$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_1=0,\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_1=[0.4\quad 2],D_{12}=0,\boldsymbol{C}_2=[1\quad 5],D_{21}=1$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=[0.2\quad 0],\boldsymbol{F}_a=[0\quad 2],F_b=1$$

则图 4.9.1 所示系统可以等价地表示为如图 4.9.2 所示系统,其中等价被控对象 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ 由式(4.9.18)描述,并且 $\Sigma(t)\in\Omega,\Delta(s)\in BH_\infty$。因此,可以利用 4.5 节介绍的设计方法,求解式(4.9.22)定义的 $\boldsymbol{P}_\lambda(s)$ 所对应的 H_∞ 标准控制问题,得到对于任意 $\Delta_p(s)$ ($\|\Delta_p(s)\|_\infty<0.4$),使闭环系统鲁棒指数稳定的输

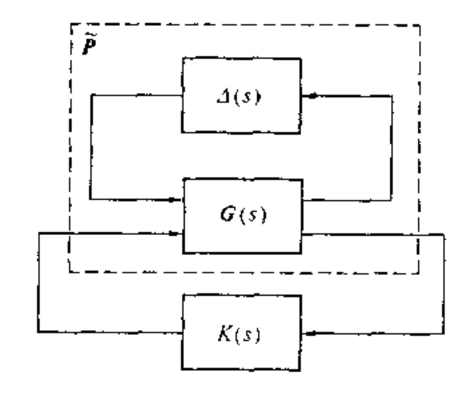


图 4.9.2 等价系统

出反馈控制器 $K(s)$。当取 $\lambda=0.75$ 时,求得如下动态控制器

$$K(s)=-\frac{11.0525s+2.2428}{s^2+11.7017s+4.3507}$$

该控制器的具体设计过程可参见文献[19]。

4.10 干扰抑制问题

本节我们以二次型性能指标为目标函数,讨论干扰抑制问题。并将其转化为 H_∞ 标准控制问题。

设被控对象的描述为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+B_1w(t)+B_2u(t) \tag{4.10.1a}$$

$$y(t)=C_2x(t)+D_{21}w(t) \tag{4.10.1b}$$

其中 $u(t)$ 为控制输入,$w(t)$ 为干扰信号,$y(t)$ 为量测输出。假设对于任意给定的 $T>0$,$w(t)$ 满足如下有界条件(能量有限)

$$\int_0^T w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t<\infty \tag{4.10.2}$$

对于被控对象(4.10.1),考虑动态输出反馈控制器

$$u(t)=K(s)y(t) \tag{4.10.3}$$

满足如下设计目标:

(1) 闭环系统为渐近稳定。

(2) 当初始状态 $x(0)=\mathbf{0}$ 时,对于任意给定的 $T>0$

$$\int_0^T\{x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\}\mathrm{d}t<\gamma\int_0^T w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t \tag{4.10.4}$$

对所有满足(4.10.2)的干扰信号 $w(t)$ 成立。其中,$\gamma>0$ 为给定常数,$Q\geqslant 0$、$R>\mathbf{0}$ 为加权阵。

设计指标(4.10.4)中,γ 越小,表明系统对干扰 $w(t)$ 的抑制能力越强,而加权阵 Q 和 R 用来调节干扰抑制效果和控制输入信号过大的矛盾。

下面我们证明,控制器(4.10.3)的设计问题可以归结为适当的 H_∞ 标准控制问题。为简单起见,我们只考虑 $K(s)$ 为严格正则有理函数阵的情况。即,设 $K(s)$ 的状态空间实现给定如下

$$\dot{x}_c(t)=A_cx_c(t)+B_cy(t) \tag{4.10.5a}$$

$$u(t)=C_cx_c(t) \tag{4.10.5b}$$

其中 $x_c\in\mathbf{R}^{n_c}$ 为控制器状态变量。

定义性能评价信号如下

$$z(t)=C_1x(t)+D_{12}u(t) \tag{4.10.6}$$

其中

$$C_1=\begin{bmatrix}Q^{\frac{1}{2}}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix},D_{12}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ R^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}$$

【定理 4.10.1】 设广义被控对象给定如下

$$G(s)=\begin{bmatrix} A & \frac{1}{\sqrt{\gamma}}B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}}D_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.10.7}$$

若 $K(s)$是式(4.10.7)对应的 H_∞标准控制问题的解,则闭环系统满足设计目标(1)和(2)。

【证明】 式(4.10.7)对应的 H_∞标准控制问题的框图如图 4.10.1 所示,其相应的闭环系

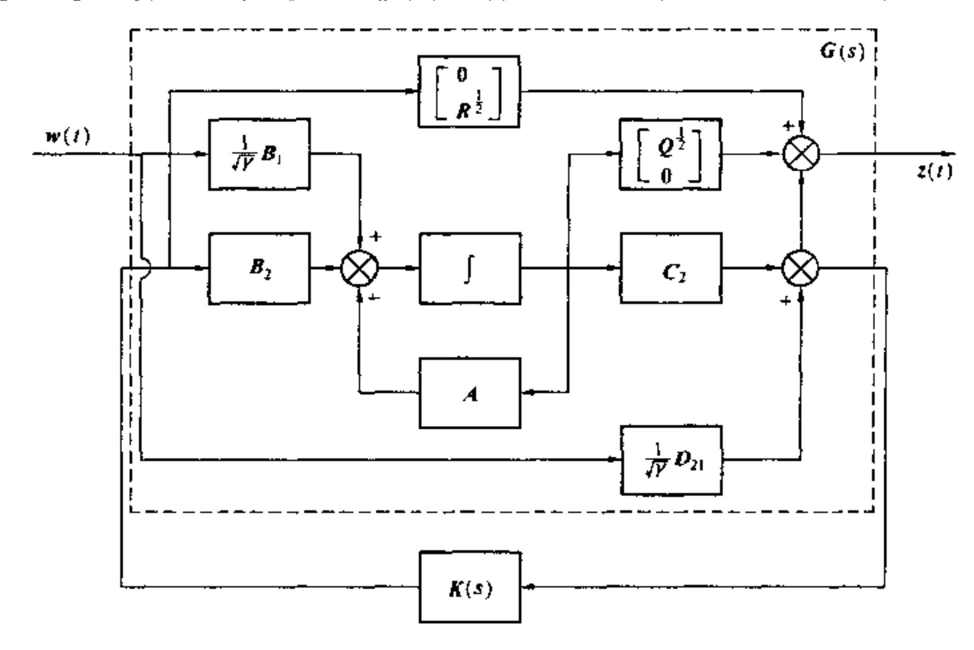


图 4.10.1 干扰抑制与 H_∞标准控制

统可以描述如下

$$\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}\bar{x}(t)+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\bar{B}w(t) \tag{4.10.8a}$$

$$z(t)=\bar{C}\bar{x}(t) \tag{4.10.8b}$$

其中,$\bar{x}^{T}=[x^{T} \quad x_c^{T}]$,且

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} A & B_2C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{bmatrix},\bar{B}=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_cD_{21} \end{bmatrix},\bar{C}=[C_1 \quad D_{12}C_c]$$

设 $K(s)$是图 4.10.1 所示 H_∞标准控制问题的解,那么,$\bar{A}$ 为稳定阵且

$$\| G_{zw}(s)\|_\infty = \left\|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}\right\|_\infty < 1 \tag{4.10.9}$$

注意到式(4.10.1)、(4.10.6)和 $K(s)$构成的闭环系统为

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}(t)+\bar{B}w(t)$$

$$z(t)=\bar{C}\bar{x}(t)$$

可见,$\bar{A}$ 亦是该闭环系统的系统阵,所以,闭环系统满足设计目标(1)。

根据定理 4.3.9 和式(4.10.9),存在 $n+n_c$ 阶正定阵 $\bar{P}>0$,使得

$$\bar{A}^{T}\bar{P}+\bar{P}\bar{A}+\frac{1}{\gamma}\bar{P}\bar{B}\bar{B}^{T}\bar{P}+\bar{C}^{T}\bar{C}<0 \tag{4.10.10}$$

定义二次型正定函数

$$V(\bar{x}(t)) = \bar{x}^{T}(t)\bar{P}\,\bar{x}(t)$$

令 $\bar{x}(0)=\mathbf{0}$，求 $V(\bar{x}(t))$沿闭环系统的解轨迹 $\bar{x}(t)$的导数，得

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) = \bar{x}^{T}[\bar{A}^{T}\bar{P} + \bar{P}\bar{A}]\bar{x} + 2\bar{x}^{T}\bar{P}\bar{B}w \tag{4.10.11}$$

将式(4.10.10)代入上式，得

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) < -\bar{x}^{T}[\bar{C}^{T}\bar{C} + \frac{1}{\gamma}\bar{P}\bar{B}\bar{B}^{T}\bar{P}]\bar{x} + 2\bar{x}^{T}\bar{P}\bar{B}w =$$

$$-z^{T}(t)z(t) + \gamma w^{T}(t)w(t) - \left\|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\bar{B}^{T}\bar{P}\,\bar{x}(t) - \sqrt{\gamma}w(t)\right\|^{2} \tag{4.10.12}$$

对上式两端从 0 到 T 积分，并注意到 $V(\mathbf{0})=0$，$V(\bar{x}(T))\geqslant\mathbf{0}$，有

$$\int_{0}^{T}z^{T}(t)z(t)\mathrm{d}t + V(\bar{x}(T)) + \int_{0}^{T}\left\|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\bar{B}^{T}\bar{P}\,\bar{x}(t) - \sqrt{\gamma}w(t)\right\|^{2}\mathrm{d}t <$$

$$\gamma\int_{0}^{T}w^{T}(t)w(t)\mathrm{d}t \tag{4.10.13}$$

故

$$\int_{0}^{T}z^{T}(t)z(t)\mathrm{d}t < \gamma\int_{0}^{T}w^{T}(t)w(t)\mathrm{d}t \tag{4.10.14}$$

将式(4.10.6)的 $z(t)$代入上式，即得闭环系统满足设计目标(2)。 **证毕**

以上我们只考虑了二次型性能指标下的干扰抑制问题，而没有考虑模型中的不确定性。下面简单介绍当系统中存在参数不确定性时，如何通过求解 H_∞标准控制问题来求同时满足鲁棒稳定性和干扰抑制性能要求的控制器。

设被控对象给定如下

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \tag{4.10.15a}$$

$$z(t) = C_1x(t) + D_{12}u(t) \tag{4.10.15b}$$

其中 $\Delta A(t) = E\Sigma(t)F$，$\Sigma\in\Omega$，$\Omega$ 如式(4.6.3)定义。z 为干扰抑制性能评价信号。

对被控对象(4.10.15)，设计状态反馈控制器

$$u(t) = Kx(t)$$

满足如下设计目标：

(1′)　$w=\mathbf{0}$ 时，闭环系统二次稳定。

(2′)　$\Delta A(t)=\mathbf{0}$ 时，闭环系统满足干扰抑制设计目标(4.10.4)。

仿照定理 4.10.1 的证明，可得如下结论。

【定理 4.10.2】　令 $\Delta A(t)=\mathbf{0}$。如果 $A+B_2K$ 为稳定阵，且满足

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(C_1 + D_{12}K)(sI - A - B_2K)^{-1}B_1\right\|_{\infty} < 1 \tag{4.10.16}$$

则闭环系统满足设计目标(2′)。

为了求得同时满足设计目标(1′)和(2′)的状态反馈控制器，考虑 4.10.2 所示的 H_∞标准



控制问题。

令

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} w \\ v_1 \end{bmatrix},\ \hat{z} = \begin{bmatrix} z \\ v_2 \end{bmatrix}$$

则广义被控对象为

$$\begin{bmatrix} \hat{z} \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} \hat{w} \\ u \end{bmatrix} \tag{4.10.17}$$

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & [\frac{1}{\sqrt{\gamma}}B_1 \quad E] & B_2 \\ \hline \begin{bmatrix} C_1 \\ F \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} D_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline I & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{4.10.18}$$

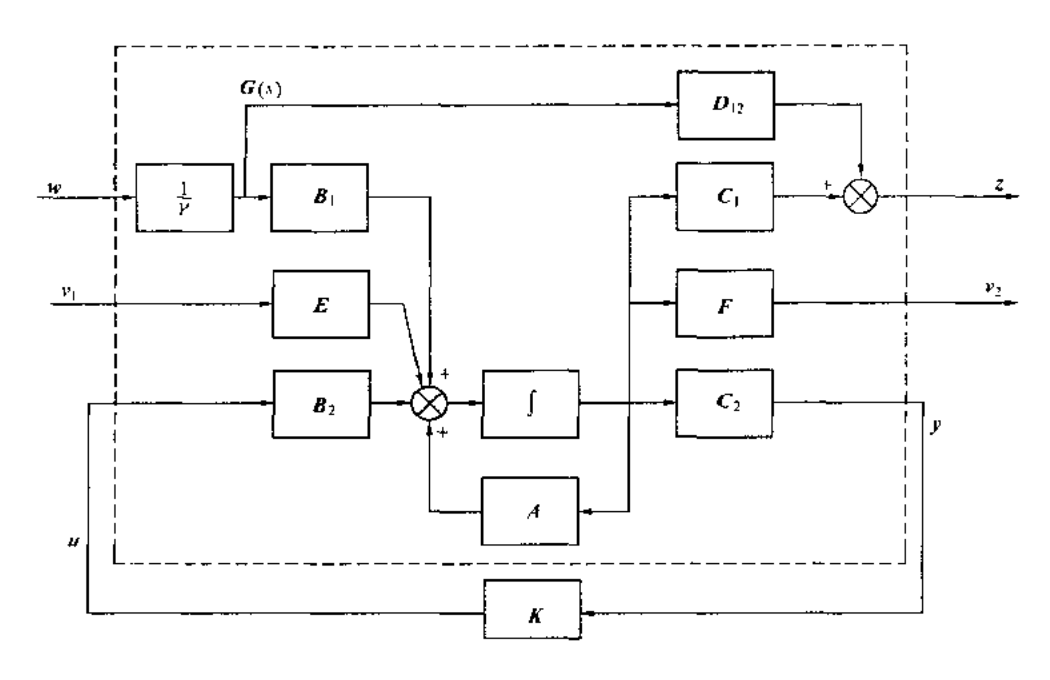


图 4.10.2 鲁棒稳定与干扰抑制设计

显然，$A + B_2K$ 为稳定阵等价于图 4.10.2 所示系统的内稳定性，且容易验证从 $\hat{w}$ 到 $\hat{z}$ 的闭环传函阵为

$$G_{\hat{z}\hat{w}}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & * \\ * & G_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{4.10.19}$$

其中 * 表示适当矩阵，而

$$G_{11}(s) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(C_1 + D_{21}K)(sI - A - B_2K)^{-1}B_1 \tag{4.10.20}$$

$$G_{22}(s) = F(sI - A - B_2K)^{-1}E \tag{4.10.21}$$

因此，如果 $\| G_{\hat{z}\hat{w}}(s) \|_\infty < 1$，则 $\| G_{11}(s) \|_\infty < 1$ 和 $\| G_{22}(s) \|_\infty < 1$ 同时成立，故根据定理 4.6.1和定理 4.10.1，闭环系统同时满足设计目标(1′)和(2′)。

上述讨论表明，满足设计目标(1′)和(2′)的控制器 K，可以通过解图 4.10.2 所示 H_∞ 标准控制问题而得到。

【例 4.10.1】[19] A4D 型飞机在高度为 15 000ft(英尺)、时速 0.9Ma 时的动态过程由下述状态方程描述

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1 w + B_2 u \tag{4.10.22}$$

其中状态变量 $x^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$，$x_1$ 为飞行速度(ft/s)，x_2 为仰角、x_3 为攻角角速度，x_4 为攻角，u 为升降舵操作量，w 是等价扰动信号。δ 为模型参数的不确定性，满足 $|\delta| \leqslant 50$。而

$$A + \Delta A = \begin{bmatrix} -0.0605 & -32.37 & 0 & 32.2 \\ -0.00014 & -1.475 & 10 & 0 \\ -0.0111 & -34.72 & -2.793 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \\ 0.0005 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1064 \\ -33.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于式(4.10.22)的被控系统，设计状态反馈控制器，使得闭环系统满足：

(1) 鲁棒稳定性：对参数不确定性 δ，系统是二次稳定的。

(2) 干扰抑制性能：对于任意给定的 $T > 0$

$$\left\{\int_0^T (x^T Q x + u^T R u)\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant 10 \| w(t) \|_2, \forall w, x(0) = 0$$

对任意满足 $|\delta| \leqslant 50$ 的 δ 成立，并取权矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 100^2$$

令

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \Sigma = \frac{\delta}{50}, F = [0 \quad 50 \quad 0 \quad 0]$$

则被控对象(4.10.22)可以表示为如式(4.10.15a)的形式，且不确定性参数 Σ 满足 $|\Sigma| \leqslant 1$。

定义评价信号 $z = C_1 x + D_{12} u$，并取

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

那么，根据本节前面的讨论，满足上述设计条件的状态反馈控制器 $u = Kx$，可以通过解式(4.10.18)给出的 $G(s)$ 所对应的 H_∞ 标准控制问题而得到，其中 $\sqrt{\gamma} = 10$。由定理 4.4.1 可知，如果 Riccati 不等式(4.4.5)有正定解，则可以求得期望的状态反馈控制器。

将本例数据代入式(4.10.18)，按上述设计方法，得正定解为

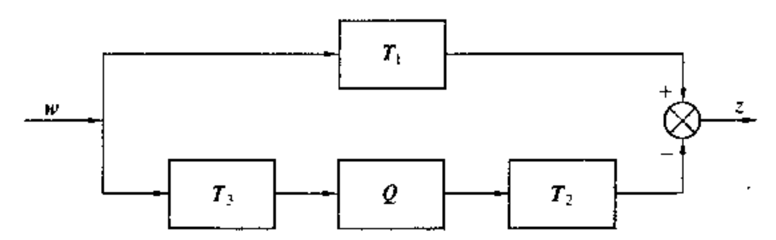
$$X = 10^6\begin{bmatrix} 0.031\,6 & -0.267\,7 & 0.001\,7 & 0.329\,5 \\ -0.267\,7 & 3.195\,5 & -0.021\,4 & -4.009\,9 \\ 0.001\,7 & -0.021\,4 & 0.000\,8 & 0.028\,9 \\ 0.329\,5 & -4.009\,9 & 0.028\,9 & 5.213\,2 \end{bmatrix}$$

根据此解 X,由式(4.4.6)得满足要求的控制器为

$$K = [2.760\,7 \quad -38.284\,5 \quad 2.602\,5 \quad 55.077\,4]$$

习　题

4.1　模型匹配问题。如图所示,用三个传函阵 T_3、Q_1、T_2 的串联去逼近传函阵 T_1。其中 $T_1, T_2, T_3 \in RH_\infty$ 已知,$Q \in RH_\infty$ 待求。



模型匹配问题的提法是选择 $Q \in RH_\infty$,使

$$\sup\{\|z\|_2 \mid w \in H_2, \|w\|_2 \leq 1\}$$

极小,即 $\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty$ 极小。试将上述模型匹配问题化为图 4.2.1 所示的 H_∞ 最优控制问题。(提示:取控制器 $K = -Q$)

4.2　设 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B \in RH_\infty$。试证明 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$($\gamma > 0$ 为常数)的充分必要条件是

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + \gamma^2 PBB^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}C = 0$$

有半正定解 $P \geq 0$,且 $A + \gamma^{-2}BB^{\mathrm{T}}P$ 为稳定阵。

4.3　设 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, D \neq 0$,且 A 为稳定阵。试证明对于给定的 $\gamma(> \|D\|_\infty)$,$\|G(s)\|_\infty < \gamma$ 的充分必要条件为 Riccati 方程

$$P(A + BR^{-1}D^{\mathrm{T}}C) + (A + BR^{-1}D^{\mathrm{T}}C)^{\mathrm{T}}P + PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}(I + DR^{-1}D^{\mathrm{T}})C = 0$$

有非负定解 $P \geq 0$,且 $A + BR^{-1}(B^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}C)$ 为稳定阵。其中 $R = \gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}D > 0$。

4.4　给定二阶系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

和被控输出

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

(1) 写出 H_∞ 控制问题的广义被控对象的动态方程。

(2) 判断是否存在状态反馈控制律,使闭环传函阵 $G_{zw}(s)$ 的 H_∞ 范数小于 3。

(3) 如果这样的状态反馈控制律存在,试计算并写出它的表达式。

4.5　给定一阶系统

$$\dot{x} = -x + w + u$$

和被控输出

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

试设计状态反馈控制律,使得从噪声 w 到被控输出 z 的传函 $G_{zw}(s)$的 H_∞范数小于 2。

4.6 试证明引理 4.5.1。(提示:$\| G(s) \|_\infty = \| G^T(s) \|_\infty$)

4.7 设 $T_{zw}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \in RH_\infty$,且 $\bar{\sigma}(D) < 1$。

试证明,若 $\| T_{zw}(s) \|_\infty < 1$,则存在 $\beta_+ > 0$,使得对每个 $\beta \in [0, \beta_+)$,如下不等式成立

$$\| T_{zw}(s) T_\beta(s) \|_\infty < 1$$

其中

$$T_\beta = C(sI - A)^{-1}\sqrt{\beta}I$$

4.8 试验证(4.8.5)两式成立。

第五章　时滞系统 H_∞ 控制

时滞现象在实际工程问题中是普遍存在的。如气体、液体的长管路传输，各种化工生产过程以及加热温度控制等控制问题中均存在时滞。控制系统中时滞的存在往往导致系统的不稳定和较差的系统性能。因此，时滞系统（包括不确定时滞系统）的 H_∞ 控制（鲁棒 H_∞ 控制）问题的研究具有十分重要的理论意义和应用价值。自从 1994 年韩国学者 J.H.Lee 在时域中基于状态空间模型，利用 Riccati 方法，提出时滞系统的无记忆 H_∞ 控制器设计问题以来[53]，时滞系统的 H_∞ 控制问题的研究取得了长足的发展，成为近几年来 H_∞ 控制领域的热点研究课题之一，并取得了丰硕的研究成果。目前，时滞系统的无记忆不依赖于时滞大小的各种 H_∞ 控制器的设计问题已基本解决，包括状态反馈控制器的设计[53],[68],[71],[72],[73]、动态输出反馈控制器设计[74],[87]，基于状态观测器的动态反馈控制器设计[69],[70]等，其处理问题的方法已从 Riccati 方法过渡到先进的 LMI 方法。

本章，我们把上述成型的时滞系统的 H_∞ 控制器设计问题介绍给读者，包括 Riccati 方法和 LMI 方法。但需要指出的是，不依赖于时滞的不确定时滞系统的 H_∞ 控制方法，当系统的时滞较小时，不免有些保守[75],[76]。同时，无记忆反馈控制，其控制阵不影响时滞对系统的作用，因而对于滞后影响较大的系统显得无能为力[77]。因此（不确定）时滞系统，利用 LMI 技术和有记忆控制器研究时滞依赖型（鲁棒）H_∞ 控制器的设计问题将是一个具有挑战性的课题。目前，只在较简单的情况下，得到了上述问题的解。我们也将在本章中对时滞依赖型鲁棒 H_∞ 控制问题做一定的介绍。另外，本章中一些定理的证明均是采用 Lyapunov 方法，证明的思路是相近的。但考虑到证明的完整性，我们还是分别给出了证明，读者可以从中体会此类问题的研究方法。

5.1　时滞系统 H_∞ 控制

5.1.1　状态时滞系统 H_∞ 控制

考虑状态时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d) + Bu(t) + Dw(t) \tag{5.1.1a}$$

$$z(t) = Ex(t) \tag{5.1.1b}$$

$$x(t) = \phi(t), t \in [-d, 0] \tag{5.1.1c}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 为状态，$u \in \mathbf{R}^p$ 为控制输入，$w \in \mathbf{R}^r$ 为干扰输入，$z \in \mathbf{R}^m$ 为被控输出，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}_d$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 为相应维数的常阵，常值时滞 $d \geq 0$，向量值初值函数 $\phi(t) \in C[-d, 0]$。

对上述一类时滞系统，所要求解的问题可表述为：

【问题 5.1.1】　设计无记忆状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) \tag{5.1.2}$$

使对任意时滞 $d \geq 0$ 满足

(1) 闭环系统是内稳定的。

(2) 在零初始条件下,从 w 到 z 的闭环传函阵

$$G_{zw}(s) = E(sI - A_K - A_d e^{-sd})^{-1} D$$

其中 $A_K = A + BK$,满足性能指标

$$\| G_{zw}(s) \|_\infty \leqslant \gamma \tag{5.1.3}$$

将式(5.1.2)的控制律代入式(5.1.1a),得到闭环系统

$$\dot{x}(t) = A_K x(t) + A_d x(t-d) + Dw(t) \tag{5.1.4}$$

我们先来讨论闭环系统(5.1.4)的稳定性问题,为此令干扰输入 $w(t) = 0$,下面的定理给出了闭环系统(5.1.4)稳定的一个充分条件。

【定理 5.1.1】 如果存在正定矩阵 P 和 Q 满足如下 Riccati 不等式

$$A_K^{\mathrm{T}} P + PA_K + PA_d Q^{-1} A_d^{\mathrm{T}} P + Q < 0 \tag{5.1.5}$$

则闭环系统(5.1.4)对任意 $d \geqslant 0$ 是内稳定的。

【证明】 定义 Lyapunov 函数如下

$$V(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t) P x(t) + \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(s) Q x(s) \mathrm{d}s$$

其中 $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-d, 0]$。显然存在常数 δ_1 和 δ_2,使得

$$\delta_1 \| x(t) \|^2 \leqslant V(x_t) \leqslant \delta_2 \| x_t \|_c^2$$

例如,取 $\delta_1 = \lambda_{\min}(P), \delta_2 = \lambda_{\max}(P) + d\lambda_{\max}(Q)$。对 $V(x_t)$ 沿由式(5.1.1a)和式(5.1.2)构成的闭环方程式(5.1.4)的解轨迹求导,得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x_t) = & x^{\mathrm{T}}(t) A_K^{\mathrm{T}} P x(t) + x^{\mathrm{T}}(t-d) A_d^{\mathrm{T}} P x(t-d) + x^{\mathrm{T}}(t) PA_K x(t) + \\ & x^{\mathrm{T}}(t) PA_K x(t-d) + x^{\mathrm{T}}(t) Q x(t) - x^{\mathrm{T}}(t-d) Q x(t-d) = \\ & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A_K^{\mathrm{T}} P + PA_K + Q & PA_d \\ A_d^{\mathrm{T}} P & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

根据 Schur 补引理(引理 4.4.3),如果 Riccati 不等式(5.1.5)成立,则式(5.1.6)中的矩阵负定,即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x_t) < 0$。根据 Lyapunov 稳定性理论(定理 1.4.5),闭环系统是渐近稳定的。 **证毕**

定理 5.1.1 提供了一个不依赖于系统时滞的稳定性准则,因为条件(5.1.5)中不含时滞 d。

接下来讨论问题 5.1.1 给出的时滞系统 H_∞ 性能设计问题。

【定理 5.1.2】 问题 5.1.1 对任意 $d \geqslant 0$ 有解的充分条件为存在 K 和正定阵 $P > 0$、$Q > 0$ 满足如下 Riccati 不等式

$$A_K^{\mathrm{T}} P + PA_K + PA_d Q^{-1} A_d^{\mathrm{T}} P + Q + \frac{1}{\gamma} E^{\mathrm{T}} E + \frac{1}{\gamma} PDD^{\mathrm{T}} P < 0 \tag{5.1.7}$$

【证明】 注意到不等式(5.1.7)隐含不等式(5.1.5),根据定理 5.1.1,闭环系统对任意 $d \geqslant 0$ 内稳定。

定义正定阵 S 如下

$$S = -\left(A_K^{\mathrm{T}} P + PA_K + PA_d Q^{-1} A_d^{\mathrm{T}} P + Q + \frac{1}{\gamma} E^{\mathrm{T}} E + \frac{1}{\gamma} PDD^{\mathrm{T}} P\right)$$

则,我们有

$$A_K^{\mathrm T}P + PA_K + PA_dQ^{-1}A_d^{\mathrm T}P + Q + \frac{1}{\gamma}E^{\mathrm T}E + \frac{1}{\gamma}PDD^{\mathrm T}P + S = 0$$

和

$$(-\mathrm{j}\omega I - A_K^{\mathrm T} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega d}A_d^{\mathrm T})P + P(\mathrm{j}\omega I - A_K - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d}A_d) - PA_dQ^{-1}A_d^{\mathrm T}P - Q - S -$$

$$\frac{1}{\gamma}E^{\mathrm T}E - \frac{1}{\gamma}PDD^{\mathrm T}P = -\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d}A_d^{\mathrm T}P - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d}PA_d,\ \forall\,\omega \in \mathbf{R} \tag{5.1.8}$$

以下为推导简便，定义两矩阵如下

$$W(\mathrm{j}\omega) = Q + PA_dQ^{-1}A_d^{\mathrm T}P - A_d^{\mathrm T}P\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega d} - PA_d\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d} = [PA_d\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d} - Q]Q^{-1}[A_d^{\mathrm T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega d} - Q],\ \forall\,\omega \in \mathbf{R}$$

$$X(\mathrm{j}\omega) = (\mathrm{j}\omega I - A_K - A_d\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d})^{-1},\ \forall\,\omega \in \mathbf{R}$$

利用 $W(\mathrm{j}\omega)$ 和 $X(\mathrm{j}\omega)$，式(5.1.8)可改写为

$$(X^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega))^{-1}P + PX^{-1}(\mathrm{j}\omega) - W(\mathrm{j}\omega) - S - \frac{1}{\gamma}E^{\mathrm T}E - \frac{1}{\gamma}PDD^{\mathrm T}P = 0$$

或

$$PX(\mathrm{j}\omega) + X^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)P - \frac{1}{\gamma}X^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)PDD^{\mathrm T}PX(\mathrm{j}\omega) = X^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)\{W(\mathrm{j}\omega) + S + \frac{1}{\gamma}E^{\mathrm T}E\}X(\mathrm{j}\omega)$$

上式隐含

$$D^{\mathrm T}PX(\mathrm{j}\omega)D + D^{\mathrm T}X^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)PD - \frac{1}{\gamma}D^{\mathrm T}X^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)PDD^{\mathrm T}PX(\mathrm{j}\omega)D - \gamma I =$$

$$-\gamma I + D^{\mathrm T}X^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)\{W(\mathrm{j}\omega) + S + \frac{1}{\gamma}E^{\mathrm T}E\}X(\mathrm{j}\omega)D$$

因此

$$-\frac{1}{\gamma}(\gamma I - D^{\mathrm T}PX(-\mathrm{j}\omega)D)^{\mathrm T}(\gamma I - D^{\mathrm T}PX(\mathrm{j}\omega)D) =$$

$$-\gamma I + D^{\mathrm T}X^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)\{W(\mathrm{j}\omega) + S\}X(\mathrm{j}\omega)D + \frac{1}{\gamma}D^{\mathrm T}X^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)E^{\mathrm T}EX(\mathrm{j}\omega)D,\ \forall\,\omega \in \mathbf{R}$$

上式的左端为非正定的，而右端的 $EX(\mathrm{j}\omega)D = G_{zw}(\mathrm{j}\omega)$，因此，我们有

$$-\gamma I + D^{\mathrm T}X^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)\{W(\mathrm{j}\omega) + S\}X(\mathrm{j}\omega)D + \frac{1}{\gamma}G_{zw}^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)G_{zw}(\mathrm{j}\omega) \leqslant 0$$

由此得

$$G_{zw}^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)G_{zw}(\mathrm{j}\omega) \leqslant \gamma^2 I - \gamma D^{\mathrm T}X^{\mathrm T}(-\mathrm{j}\omega)\{W(\mathrm{j}\omega) + S\}X(\mathrm{j}\omega)D \leqslant \gamma^2 I,\ \forall\,\omega \in \mathbf{R}$$

即 $\|G_{zw}(s)\|_\infty \leqslant \gamma$。 证毕

【定理 5.1.3】 如果存在正定阵 Q、R 和正数 $\epsilon > 0$，使得 Riccati 不等式

$$A^{\mathrm T}P + PA - \frac{1}{\epsilon}PBR^{-1}B^{\mathrm T}P + \frac{1}{\gamma}PDD^{\mathrm T}P + PA_dQ^{-1}A_d^{\mathrm T}P + Q + \frac{1}{\gamma}E^{\mathrm T}E < 0 \tag{5.1.9}$$

有正定解 $P > 0$，则问题 5.1.1 的状态反馈解为

$$K = -\frac{1}{2\epsilon}R^{-1}B^{\mathrm T}P \tag{5.1.10}$$

【证明】 将状态反馈阵(5.1.10)代入不等式(5.1.7)，即得式(5.1.9)。 证毕

注 由定理 4.3.11，Riccati 不等式(5.1.9)可转换为如下 Riccati 方程

$$A^{\mathrm T}P + PA - \frac{1}{\epsilon}PBR^{-1}B^{\mathrm T}P + \frac{1}{\gamma}PDD^{\mathrm T}P + PA_dQ^{-1}A_d^{\mathrm T}P + Q + \frac{1}{\gamma}E^{\mathrm T}E + \epsilon I = 0 \tag{5.1.11}$$

上式中，Q 和 ϵ 为适当选取的参数，以使 Riccati 方程(3.8.1)存在正定解 $P > 0$。而正定阵 R

可任意选取,详见文献[53]。

5.1.2 状态和输入时滞系统 H_∞ 控制

考虑同时具有状态和输入时滞的系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + A_d x(t - d_1) + B_d u(t - d_2) + Dw(t) \tag{5.1.12a}$$

$$z(t) = Ex(t) \tag{5.1.12b}$$

$$x(t) = 0, t < 0, x(0) = x_0 \tag{5.1.12c}$$

这里 $d_1 \geqslant 0$ 为状态时滞,$d_2 \geqslant 0$ 为控制输入时滞,其它各量同式(5.1.1)。

所要求解的问题为:

【问题 5.1.2】 设计无记忆状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) \tag{5.1.13}$$

使对任意 $d_1 \geqslant 0$、$d_2 \geqslant 0$ 满足

(1) 闭环系统(5.1.12a)和(5.1.13)内稳定。

(2) 在零初态下,从 w 到 z 的闭环传函阵

$$G_{zw}(s) = E(sI - A_K - A_d e^{-sd_1} - B_d K e^{-sd_2})^{-1} D$$

其中 $A_K = A + BK$,满足性能指标

$$\| G_{zw}(s) \|_\infty \leqslant \gamma \tag{5.1.14}$$

如果取式(5.1.13)的控制律为

$$u(t) = -\frac{1}{\varepsilon} R^{-1} B^T P x(t) \tag{5.1.15}$$

其中 $\epsilon > 0$,$R \in \mathbf{R}^{p \times p}$为正定加权阵,$P \in \mathbf{R}^{n \times n}$为下面将要求解的方程的正定解。此时,闭环传函阵 $G_{zw}(s)$为

$$G_{zw}(s) = E(sI - A - A_d e^{-sd_1} + \frac{1}{\varepsilon} BR^{-1} B^T P + \frac{1}{\varepsilon} B_d R^{-1} B^T P e^{sd_2})^{-1} D$$

首先研究式(5.1.12)的镇定问题。

考虑如下形式的 Riccati 不等式

$$PA + A^T P - \frac{1}{\varepsilon} PBR^{-1} B^T P + \frac{1}{\varepsilon} PB_d R^{-1} B_d^T P + PA_d A_d^T P + I < 0 \tag{5.1.16}$$

在式(5.1.12a)中取 $w(t) = \mathbf{0}$,我们有如下闭环自由系统(5.1.12a)和(5.1.15)可镇定的充分条件。

【定理 5.1.4】 时滞闭环系统(5.1.12a)($w(t) = \mathbf{0}$)和(5.1.15)对任意的 $d_1 \geqslant 0$ 和 $d_2 \geqslant 0$ 是稳定的充分条件为,对于 $\epsilon > 0$ 和正定阵 $R > 0$,Riccati 不等式(3.1.16)存在正定解 $P > 0$。

【证明】 由式(5.1.12a)($w(t) = \mathbf{0}$)和式(5.1.15)构成的闭环系统为

$$\dot{x}(t) = Ax + A_d x_{d_1} - \frac{1}{\varepsilon} BR^{-1} B^T Px - \frac{1}{\varepsilon} B_d R^{-1} B^T P x_{d_2} \tag{5.1.17}$$

$$x(t) = \mathbf{0}, t < 0, x(0) = x_0$$

其中 $x_{d_1} = x(t - d_1)$,$x_{d_2} = x(t - d_2)$。取如下形式的 Lyapunov 函数

$$V(t) = x^T P x + \int_{t-d_1}^{t} x^T(\theta) x(\theta) d\theta + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-d_2}^{t} x^T(\theta) PBR^{-1} B^T P x(\theta) d\theta$$

对上式沿闭环方程(5.1.17)的解轨迹求导,得

$$\dot{V}(t)=2x^{\mathrm{T}}P(Ax+A_dx_{d_1}-\frac{1}{\varepsilon}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px-\frac{1}{\varepsilon}B_dR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2})+x^{\mathrm{T}}x-x_{d_1}^{\mathrm{T}}x_{d_1}^{\mathrm{T}}+$$
$$\frac{1}{\varepsilon}x^{\mathrm{T}}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px-\frac{1}{\varepsilon}x_{d_2}^{\mathrm{T}}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2}$$

利用不等式

$$2\mid x^{\mathrm{T}}y\mid\leqslant\alpha x^{\mathrm{T}}x+\frac{1}{\alpha}y^{\mathrm{T}}y \tag{5.1.18}$$

这里 x 和 y 为适当维数的向量，$\alpha>0$，我们有

$$2x^{\mathrm{T}}PA_dx_{d_1}\leqslant x^{\mathrm{T}}PA_dA_d^{\mathrm{T}}Px+x_{d_1}^{\mathrm{T}}x_{d_1}$$

因此

$$\dot{V}(t)\leqslant 2x^{\mathrm{T}}PAx+x^{\mathrm{T}}PA_dA_d^{\mathrm{T}}Px+x^{\mathrm{T}}x-\frac{1}{\varepsilon}x^{\mathrm{T}}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px-\frac{2}{\varepsilon}x^{\mathrm{T}}PB_dR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2}-$$
$$\frac{1}{\varepsilon}x_{d_2}^{\mathrm{T}}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2}=x^{\mathrm{T}}\hat{S}x-\frac{2}{\varepsilon}x^{\mathrm{T}}PB_dR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2}-\frac{1}{\varepsilon}x_{d_2}^{\mathrm{T}}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2}=-\overline{x}^{\mathrm{T}}\overline{Q}\,\overline{x}$$

其中

$$\hat{S}=PA+A^{\mathrm{T}}P-\frac{1}{\varepsilon}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+PA_dA_d^{\mathrm{T}}P+I$$

$$\overline{Q}=\begin{bmatrix}-\hat{S} & PB_dR^{-1}\\ R^{-1}B_d^{\mathrm{T}}P & \varepsilon R^{-1}\end{bmatrix},\ \overline{x}=\begin{bmatrix}x\\ \frac{1}{\varepsilon}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2}\end{bmatrix}$$

由 Schur 补引理，如果 $\hat{S}+\frac{1}{\varepsilon}PB_dR^{-1}B_d^{\mathrm{T}}P<0$，则 $\overline{Q}>0$。这样，如果不等式(5.1.16)对某 $\varepsilon>0$ 和 $R>0$ 存在正定解 $P>0$，则得

$$\dot{V}(t)\leqslant-\overline{x}^{\mathrm{T}}\overline{Q}\,\overline{x}\leqslant-\alpha\parallel\overline{x}\parallel^2\leqslant-\alpha\parallel x\parallel^2<0$$

其中 $\alpha=\underline{\sigma}(\overline{Q})$。因此，由 Lyapunov 稳定性理论，闭环系统(5.1.12a)和(5.1.15)对任意 $d_1\geqslant0$ 和 $d_2\geqslant0$ 是稳定的。 **证毕**

下面讨论问题 5.1.2 给出的 H_∞ 性能设计问题。

考虑如下形式的 Riccati 方程

$$PA+A^{\mathrm{T}}P-\frac{1}{\varepsilon}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\varepsilon}PB_dR^{-1}B_d^{\mathrm{T}}P+PA_dA_d^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\gamma}E^{\mathrm{T}}E+\frac{1}{\gamma}PDD^{\mathrm{T}}P+I=-\varepsilon Q \tag{5.1.19}$$

其中 $\gamma>0$，$Q\in\mathbf{R}^{n\times n}$为正定加权阵。在上式中加、减下列各项

$$\mathrm{j}\omega P-PA_d\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d_1}-A_d^{\mathrm{T}}P\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega d_1}+\frac{1}{\varepsilon}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\varepsilon}PB_dR^{-1}B^{\mathrm{T}}P\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d_2}+\frac{1}{\varepsilon}PBR^{-1}B_d^{\mathrm{T}}P\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega d_2}$$

我们得

$$\frac{1}{\gamma}E^{\mathrm{T}}E=-\varepsilon Q-(I+PA_dA_d^{\mathrm{T}}P-PA_d\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d_1}-A_d^{\mathrm{T}}P\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega d_1})-\frac{1}{\varepsilon}(PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+PBR^{-1}B_d^{\mathrm{T}}P\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega d_2}+$$
$$PB_dR^{-1}B_d^{\mathrm{T}}P\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d_2}+PB_dR^{-1}B_d^{\mathrm{T}}P)-\frac{1}{\gamma}PDD^{\mathrm{T}}P+T^*(\mathrm{j}\omega)P+PT(\mathrm{j}\omega)=$$
$$-\varepsilon Q-Y^*(\mathrm{j}\omega)Y(\mathrm{j}\omega)-\frac{1}{\varepsilon}W^*(\mathrm{j}\omega)R^{-1}W(\mathrm{j}\omega)-\frac{1}{\gamma}PDD^{\mathrm{T}}P+T^*(\mathrm{j}\omega)P+PT(\mathrm{j}\omega) \tag{5.1.20}$$

其中

$$T(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\omega I-A-A_d\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d_1}+\frac{1}{\varepsilon}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\varepsilon}B_dR^{-1}B^{\mathrm{T}}P\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d_2}$$

$$Y(\mathrm{j}\omega)=A_d^{\mathrm{T}}P\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega d_1}-I,\ W(\mathrm{j}\omega)=B^{\mathrm{T}}P\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega d_2}+B_d^{\mathrm{T}}P$$

因为 Riccati 方程(5.1.19)隐含 Riccati 不等式(5.1.16),故由定理 5.1.4,控制律(5.1.5),其中 P 为方程(5.1.19)的解,是系统(5.1.12a)的镇定控制器。

对方程(5.1.20),左乘 $\gamma D^{\mathrm{T}}T^{-1*}(\mathrm{j}\omega)$,右乘 $T^{-1}(\mathrm{j}\omega)D$,得

$$G_{zw}^*(\mathrm{j}\omega)G_{zw}(\mathrm{j}\omega)=\gamma U(\mathrm{j}\omega)+\gamma U^*(\mathrm{j}\omega)-U^*(\mathrm{j}\omega)U(\mathrm{j}\omega)-\gamma D^{\mathrm{T}}T^{-1*}(\mathrm{j}\omega)[\varepsilon Q+$$

$$Y^*(\mathrm{j}\omega)Y(\mathrm{j}\omega)+\frac{1}{\varepsilon}W^*(\mathrm{j}\omega)R^{-1}W(\mathrm{j}\omega)]T^{-1}(\mathrm{j}\omega)D$$

其中 $U(\mathrm{j}\omega)=D^{\mathrm{T}}PT^{-1}(\mathrm{j}\omega)D$。加、减项 $\gamma^2 I$,我们得

$$G_{zw}^*(\mathrm{j}\omega)G_{zw}(\mathrm{j}\omega)=\gamma^2 I-[U(\mathrm{j}\omega)-\gamma I]^*[U(\mathrm{j}\omega)-\gamma I]-\gamma D^{\mathrm{T}}T^{-1*}(\mathrm{j}\omega)[\varepsilon Q+$$

$$Y^*(\mathrm{j}\omega)Y(\mathrm{j}\omega)+\frac{1}{\varepsilon}W^*(\mathrm{j}\omega)R^{-1}W(\mathrm{j}\omega)]T^{-1}(\mathrm{j}\omega)D$$

因此,$G_{zw}^*(\mathrm{j}\omega)G_{zw}(\mathrm{j}\omega)\leqslant\gamma^2 I$。将以上结果归纳为如下定理。

【定理 5.1.5】 给定 $\gamma>0$。考虑系统(5.1.12),如果对某 $\varepsilon>0$,Riccati 方程(5.1.19)存在正定解 $P>0$,则问题 5.1.2 有解,且状态反馈控制律由式(5.1.15)给定。

【例 5.1.1】 取 $\gamma=0.5$,考虑系统

$$A=\begin{bmatrix}-2&1\\0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},A_d=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},B_d=\begin{bmatrix}0.2\\0\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},E=[1\quad 1]$$

取 $R=1$、$Q=I_2$ 和 $\varepsilon=0.062\,5$,Riccati 方程(5.1.19)的正定解为

$$P=\begin{bmatrix}0.767\,5&0.377\,4\\0.377\,4&0.608\,4\end{bmatrix}$$

无记忆状态反馈控制律为

$$u(t)=-6.039x_1(t)-9.735x_2(t)$$

5.2 基于观测器的时滞系统 H_∞ 控制

正如 4.7.1 小节所述,当系统的状态变量不能全部测得时,只能设计状态观测器,用状态的估值代替真值构成状态反馈,以期达到系统的镇定和满足 H_∞ 性能指标。对时滞系统,情况亦是如此。

考虑如下状态时滞系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+A_dx(t-d)+Dw_1(t)\tag{5.2.1a}$$

$$y(t)=Cx(t)+w_2(t)\tag{5.2.1b}$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}Ex(t)\\w(t)\end{bmatrix}\tag{5.2.1c}$$

$$x(t)=\phi(t),t\in[-d,0]\tag{5.2.1d}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$ 为状态,$u\in\mathbf{R}^p$ 为控制输入,$y\in\mathbf{R}^q$ 为量测输出,$w_1(t)\in\mathbf{R}^{r_1}$和 $w_2(t)\in\mathbf{R}^{r_2}$为平方可积干扰输入,$z\in\mathbf{R}^m$ 为被控输出,$\phi(t)\in\mathbf{R}^n$ 为连续的初值函数,而 A、B、A_d,C,D 和 E 为

具有适当维数的常值矩阵,常值时滞 $d\geq 0$。假设只有量测输出向量 y 可以用于反馈。

对定理 5.1.2 稍做修改,可得如下引理。

【引理 5.2.1】 给定正数 $\gamma>0$ 和正定阵 Δ,如果存在正定阵 P 满足如下 Riccati 不等式

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + PA_d\Delta^{-1}A_d^{\mathrm{T}}P + \Delta + E^{\mathrm{T}}E + \frac{1}{\gamma^2}PDD^{\mathrm{T}}P < 0 \tag{5.2.2}$$

则时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_dx(t-d)$$

是渐近稳定的,且如下不等式成立

$$\| E(sI - A - A_d\mathrm{e}^{-sd})^{-1}D \|_{\infty} \leq \gamma \tag{5.2.3}$$

首先,我们考虑有记忆的基于观测器的控制器设计问题。即考虑如下基于观测器的输出反馈动态控制律

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + A_d\hat{x}(t-d) + Bu(t) + L[C\hat{x}(t) - y(t)] + DF\hat{x}(t) \tag{5.2.4a}$$

$$u(t) = K\hat{x}(t) \tag{5.2.4b}$$

其中 $\hat{x}\in\mathbf{R}^n$ 为状态 x 的估值,$F\hat{x}(t)$为干扰 w_1 的估值,L、K 和 F 为具有适当维数的增益阵。引进观测器误差 $e(t)=x(t)-\hat{x}(t)$,我们得到如下增广系统

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{A}_d\bar{x}_d(t) + \bar{D}w(t) \tag{5.2.5a}$$

$$z(t) = \bar{E}\bar{x}(t) \tag{5.2.5b}$$

其中 $\bar{x}^{\mathrm{T}}(t) = [x^{\mathrm{T}}(t) \quad e^{\mathrm{T}}(t)]$,$\bar{x}_d(t) = \bar{x}(t-d)$,$w^{\mathrm{T}}(t) = [w_1^{\mathrm{T}}(t) \quad w_2^{\mathrm{T}}(t)]$,而

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ -DF & A+LC+DF \end{bmatrix}, \bar{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix} \tag{5.2.6a}$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ D & L \end{bmatrix}, \bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ K & -K \end{bmatrix} \tag{5.2.6b}$$

则从 w 到 z 的闭环传函阵 $G_{zw}(s)$,由下式给出

$$G_{zw}(s) = \bar{E}(sI - \bar{A} - \bar{A}_d\mathrm{e}^{-sd})^{-1}\bar{D} \tag{5.2.7}$$

【定理 5.2.1】 考虑系统(5.2.1),并假定各增益阵由下式给定

$$K = -\frac{1}{\varepsilon_c}B^{\mathrm{T}}P_c, F = \frac{1}{\gamma^2\varepsilon_c}D^{\mathrm{T}}P_c, L = -\frac{1}{\varepsilon_0}P_0C^{\mathrm{T}} \tag{5.2.8}$$

其中常数 $\varepsilon_c>0$,$\varepsilon_0>0$,而 P_c 和 P_0 分别为如下 Riccati 方程的正定解

$$P_cA + A^{\mathrm{T}}P_c - \frac{1}{\varepsilon_c}P_c(BB^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\delta_c}A_dA_d^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\gamma^2}DD^{\mathrm{T}})P_c + \varepsilon_c(\delta_cI + E^{\mathrm{T}}E + Q_c) = 0 \tag{5.2.9a}$$

$$(A+DF)P_0 + P_0(A+DF)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\varepsilon_0}P_0(C^{\mathrm{T}}C - \frac{1}{\gamma^2}K^{\mathrm{T}}K - \frac{\delta_0}{\gamma^2}I)P_0 + \varepsilon_0(DD^{\mathrm{T}} + \frac{\gamma^2}{\delta_0}A_dA_d^{\mathrm{T}} + Q_0) = 0 \tag{5.2.9b}$$

其中 $\delta_c>0$、$\delta_0>0$ 为适当选择的正数,Q_c 和 Q_0 为正定加权阵,则闭环系统(5.2.5)是渐近稳定的,并且式(5.2.7)的闭环传函阵满足 $\|G_{zw}(s)\|_{\infty}\leq\gamma$。

【证明】 由引理 5.2.1,我们只需证明对某正定加权阵 Δ,存在正定阵 P 满足不等式

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} + P\bar{A}_d\Delta^{-1}\bar{A}_d^{\mathrm{T}}P + \Delta + \bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{E} + \frac{1}{\gamma^2}P\bar{D}\bar{D}^{\mathrm{T}}P < 0 \tag{5.2.10}$$

如果我们定义 P 和 Δ 如下

$$P=\begin{bmatrix}\varepsilon_c^{-1}P_c & 0\\ 0 & \gamma^2\varepsilon_0 P_0^{-1}\end{bmatrix},\ \Delta=\begin{bmatrix}\delta_c I & 0\\ 0 & \delta_0 I\end{bmatrix} \tag{5.2.11}$$

则利用式(5.2.9),经常规代数运算,可验证式(5.2.11)满足式(5.2.10)。 证毕

现在,我们再来考虑无记忆的基于观测器的控制律

$$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}(t)+A_dG\hat{x}(t)+Bu(t)+L[C\hat{x}(t)-y(t)]+DF\hat{x}(t) \tag{5.2.12a}$$

$$u(t)=K\hat{x}(t) \tag{5.2.12b}$$

其中 $\hat{x}\in\mathbf{R}^n$ 为 x 的估值,$G\hat{x}(t)$为 $x(t-d)$的估值,而 $F\hat{x}(t)$为 w_1 的估值,L、K、F 和 G 为具有适当维数的增益阵。引入观测器误差 $e(t)=x(t)-\hat{x}(t)$,我们得到如下增广系统

$$\dot{\overline{x}}(t)=\overline{A}\,\overline{x}(t)+\overline{A}_d\overline{x}_d(t)+\overline{D}w(t) \tag{5.2.13a}$$

$$z(t)=\overline{E}\,\overline{x}(t) \tag{5.2.13b}$$

其中 $\overline{x}^{\mathrm{T}}(t)=[x^{\mathrm{T}}(t)\quad e^{\mathrm{T}}(t)]$,$\overline{x}_d(t)=\overline{x}(t-d)$,$w^{\mathrm{T}}(t)=[w_1^{\mathrm{T}}(t)\quad w_2^{\mathrm{T}}(t)]$。而

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}A+BK & -BK\\ -DF-A_dG & A+LC+DF+A_dG\end{bmatrix},\ \overline{A}_d=\begin{bmatrix}A_d & 0\\ A_d & 0\end{bmatrix} \tag{5.2.14a}$$

$$\overline{D}=\begin{bmatrix}D & 0\\ 0 & L\end{bmatrix},\ \overline{E}=\begin{bmatrix}E & D\\ K & -K\end{bmatrix} \tag{5.2.14b}$$

则从 w 到 z 的闭环传函阵 $G_{zw}(s)$为

$$G_{zw}(s)=\overline{E}(sI-\overline{A}-\overline{A}_d\mathrm{e}^{-sd})^{-1}\overline{D} \tag{5.2.15}$$

【定理 5.2.2】 考虑系统(5.2.1)并假定各增益阵给定如下

$$\begin{gathered}K=-\frac{1}{\varepsilon_c}B^{\mathrm{T}}P_c,\ F=\frac{1}{\gamma^2\varepsilon_c}D^{\mathrm{T}}P_c\\ L=-\frac{1}{\varepsilon_0}P_0C^{\mathrm{T}},\ G=\frac{1}{\varepsilon_c\delta_c}A_d^{\mathrm{T}}P_c\end{gathered} \tag{5.2.16}$$

其中 ε_c、ε_0 和 δ_c 为适当的正数,P_c 和 P_0 分别为如下 Riccati 方程的正定解矩阵

$$P_cA+A^{\mathrm{T}}P_c-\frac{1}{\varepsilon_c}P_c(BB^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\delta_c}A_dA_d^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\gamma^2}DD^{\mathrm{T}})P_c+\varepsilon_c(\delta_cI+E^{\mathrm{T}}E+Q_c)=0 \tag{5.2.17a}$$

$$(A+DF+A_dG)P_0+P_0(A+DF+A_dG)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\varepsilon_0}P_0(C^{\mathrm{T}}C-\frac{1}{\gamma^2}K^{\mathrm{T}}K-\frac{\delta_0}{\gamma^2}I)P_0+$$

$$\varepsilon_0(DD^{\mathrm{T}}+\frac{\gamma^2}{\delta_c}A_dA_d^{\mathrm{T}}+Q_0)=0 \tag{5.2.17b}$$

其中标量 $\delta_0>0$,Q_c 和 Q_0 分别是正定加权阵。则闭环系统(15.2.13)渐近稳定且 H_∞ 性能指标 $\|G_{zw}(s)\|_\infty\leqslant\gamma$ 成立。

【证明】 定义 P 和 Δ 如下

$$P=\begin{bmatrix}\varepsilon_c^{-1}P_c & 0\\ 0 & \gamma^2\varepsilon_0P_0^{-1}\end{bmatrix},\ \Delta=\begin{bmatrix}\delta_cI & 0\\ 0 & \delta_0I\end{bmatrix}$$

其中 P_c 和 P_0 分别为 Riccati 方程(5.2.17a)、(5.2.17b)的正定解阵,则经常规代数运算,可得矩阵 P 满足

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}P + P\overline{A} + P\overline{A}_d\Delta^{-1}\overline{A}_d^{\mathrm{T}}P + \overline{E}^{\mathrm{T}}\overline{E} + \frac{1}{\gamma^2}P\overline{D}\,\overline{D}P = -\begin{bmatrix} Q_c & 0 \\ 0 & \gamma^2\varepsilon_0^2P_0^{-1}Q_0P_0^{-1} \end{bmatrix}$$

由引理 5.2.1,即得闭环系统是渐近稳定的,且 $\| G_{zw}(s) \|_\infty \leqslant \gamma$。 **证毕**

我们注意到,Riccati 方程(5.2.9a)、(5.2.9b)以及(5.2.17a)和(5.2.17b)是相互耦合的。我们必须首先求解式(5.2.9a)或式(5.2.17a),然后再求解式(5.2.9b)或式(5.2.17b)。上述 Riccati 方程中含有较多的可选参数,只有适当选择这些参数,才能得到方程的正定解。关于这些参数选取范围的讨论,可参见文献[69]。

【例 5.2.1】 令 $\gamma = 0.9$。考虑系统(5.2.1),其中

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

取 $Q_c = I, \delta_c = 2, \varepsilon_c = 0.0125$,Riccati 方程(5.2.17a)的正定解为

$$P_c = \begin{bmatrix} 0.010\,406 & -0.000\,568 \\ -0.000\,568 & 0.016\,236 \end{bmatrix}$$

因此,由式(5.2.16),增益阵 K, F 和 G 分别为

$$K = -[0.741\,585 \quad 2.552\,242]$$

$$F = [1.027\,756 \quad -0.056\,109]$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.413\,969 & 0.042\,218 \\ 0.416\,241 & -0.022\,724 \end{bmatrix}$$

将这些增益阵代入式(5.2.17b),并取 $Q_0 = I$、$\delta_0 = 2$ 和 $\varepsilon_0 = 0.012\,5$,则得 Riccati 方程(5.2.17b)的正定解

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.012\,389 & -0.002\,301 \\ -0.002\,301 & 0.006\,817 \end{bmatrix}$$

由式(5.2.16),增益阵 L 为

$$L^{\mathrm{T}} = -[0.438\,984 \quad 1.452\,059]^{\mathrm{T}}$$

最后,使闭环内稳定且使 $\| G_{zw}(s) \|_\infty \leqslant 0.9$ 的控制律为

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -2.322\,604 & -2.905\,809 \\ -2.893\,832 & -8.456\,439 \end{bmatrix}\hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0.438\,984 \\ 1.452\,059 \end{bmatrix}y(t)$$

$$u(t) = -[0.741585 \quad 2.552242]\hat{x}(t)$$

5.3 参数不确定时滞系统鲁棒 H_∞ 控制

正如 4.6 节所述,工程实际控制问题中,有些系统的不确定性可以描述为模型参数的不确定性。同时,时滞现象也是大量存在的。这样,就产生了具有广泛工程背景的不确定时滞系统。这类系统的鲁棒 H_∞ 性能设计问题已成为一个十分活跃的研究领域。关于参数不确定性的描述,我们考虑两种类型的不确定性。一种称为"秩 1"型不确定性,在 5.3.1 小节讨论具有这种不确定性的时滞系统的鲁棒镇定问题。另一种称为"范数有界"型不确定性。实际上,4.6 节考虑的参数不确定性即为这种类型的不确定性。在 5.3.2 小节将给出这种范数有界不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法。

5.3.1 不确定线性时滞系统的鲁棒镇定

令不确定线性时滞系统由下式描述

$$\dot{x}(t)=[A+\Delta A(r(t))]x(t)+[B+\Delta B(s(t))]u(t)+[A_d+\Delta A_d(v(t))]x(t-d_1(t))+[B_d+\Delta B_d(z(t))]u(t-d_2(t)) \tag{5.3.1a}$$

$$x(t)=0,t<0,x(0)=x_0 \tag{5.3.1b}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$ 是状态，$u\in\mathbf{R}^p$ 是控制，$r(t)\in\mathbf{R}^{k_1}$、$s(t)\in\mathbf{R}^{k_2}$、$v(t)\in\mathbf{R}^{k_3}$、$z(t)\in\mathbf{R}^{k_4}$是不确定参数向量，A、A_d、B、B_d 是具有适当维数的常值矩阵。假定时变的状态和控制时滞 $d_1,d_2\leqslant\overline{d}<\infty$和 $\dot{d}_1\leqslant\overline{m}_1<1,\dot{d}_2\leqslant\overline{m}_2<1$。假定不确定参数向量 $r(t)$、$s(t)$、$v(t)$和 $z(t)$是 Lebesgue 可测的，并属于已知的紧集 R、S、V 和 Z，这里

$$R=\{r\mid|r_i|\leqslant\overline{r},i=1,2,\cdots,k_1\},S=\{s\mid|s_i|\leqslant\overline{s},i=1,2,\cdots,k_2\}$$

$$V=\{v\mid|v_i|\leqslant\overline{v},i=1,2,\cdots,k_3\},Z=\{z\mid|z_i|\leqslant\overline{z},i=1,2,\cdots,k_4\}$$

进一步，我们假定不确定性具有“秩 1”形式，即

$$\Delta A(r)=\sum_{i=1}^{k_1}A_ir_i(t),\Delta B(s)=\sum_{i=1}^{k_2}B_is_i(t)$$

$$\Delta A_d(v)=\sum_{i=1}^{k_3}A_{di}v_i(t),\Delta B_d(z)=\sum_{i=1}^{k_4}B_{di}z_i(t)$$

其中 A_i、B_i、A_{di}和 B_{di}具有如下形式

$$A_i=d_ie_i^{\mathrm{T}},B_i=f_ig_i^{\mathrm{T}},A_{di}=l_iq_i^{\mathrm{T}},B_{di}=h_iw_i^{\mathrm{T}}$$

且 $d_i,e_i,f_i,l_i,q_i,h_i\in\mathbf{R}^n$，而 $g_i,w_i\in\mathbf{R}^p$。

显然，矩阵 A_i、B_i、A_{di}、B_{di}具有“秩 1”形式。需要注意的是任意 $n\times n$ 矩阵 A_i 总能被分解为“秩 1”矩阵之和。例如，对系统(5.3.1a)，我们可将 A_i 表示为 $A_i=\sum_{j=1}^{m}A_{ij}$，其中 A_{ij} 为“秩 1”矩阵。因此，如果以 $\sum_{j=1}^{m}A_{ij}r_{ij}$ 代替A_ir_i，则不确定性矩阵 $\Delta A(r)$ 可表示为 $\Delta A(r)=\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{m}A_{ij}r_{ij}$，其中不确定参数 r_{ij} 满足约束条件 $|r_{ij}|<\overline{r},i=1,2,\cdots,k_1,j=1,2,\cdots,m$。类似地，可得不确定性矩阵 $\Delta B(s)$，$\Delta A_d(v)$ 和 $\Delta B_d(z)$ 的相应表达式。将这些不确定性矩阵的新的表达式代入式(5.3.1a) 中，就得到一个新系统，这个新系统中的参数不确定性具有“秩 1” 形式，并且这个新系统的可镇定性隐含原系统(5.3.1a) 的可镇定性。因此，假定不确定性具有“秩 1” 形式是合理的[83]。

为引用方便，我们引进如下记号

$$T=\overline{r}\sum_{i=1}^{k_1}d_id_i^{\mathrm{T}},\quad U=\overline{r}\sum_{i=1}^{k_1}e_ie_i^{\mathrm{T}}$$

$$V=\overline{s}\sum_{i=1}^{k_2}g_ig_i^{\mathrm{T}},\quad W=\overline{s}\sum_{i=1}^{k_2}f_if_i^{\mathrm{T}}$$

$$H=\overline{v}\sum_{i=1}^{k_3}l_il_i^{\mathrm{T}},\quad M=\overline{v}\sum_{i=1}^{k_3}q_iq_i^{\mathrm{T}}$$

$$Z=\overline{z}\sum_{i=1}^{k_4}h_ih_i^{\mathrm{T}},\quad Y=\overline{z}\sum_{i=1}^{k_4}w_iw_i^{\mathrm{T}}$$

下面讨论不确定时滞系统(5.3.1)的镇定控制器设计。考虑如下矩阵 Riccati 方程

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - P\hat{R}P + U + \frac{1}{1-\overline{m}_1}M + \frac{1}{1-\overline{m}_1}I + \varepsilon Q = 0 \tag{5.3.2a}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{\varepsilon}\left(BR^{-1}B^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1-\overline{m}_2}B_dR^{-1}B_d^{\mathrm{T}} - BR^{-1}(V+Y)R^{-1}B^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1-\overline{m}_2}X - W\right) - T - H - A_dA_d^{\mathrm{T}} \tag{5.3.2b}$$

其中 ε 为一正数,I 为 $n\times n$ 维单位阵,而 $R\in\mathbf{R}^{p\times p}$ 和 $Q\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为正定对称加权阵。令无记忆线性状态反馈控制律为

$$u = -\frac{1}{\varepsilon}R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t) \tag{5.3.3}$$

将式(5.3.3)代入式(5.3.1a),可得闭环系统方程

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(r(t))]x(t) - \frac{1}{\varepsilon}[B + \Delta B(s(t))]R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t) + [A_d + \Delta A_d(v(t))]x(t-d_1(t)) - \frac{1}{\varepsilon}[B_d + \Delta B_d(z(t))]R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t-d_2(t)) \tag{5.3.4a}$$

$$x(t) = 0,\ t<0,\ x(0) = x_0 \tag{5.3.4b}$$

取如下形式的 Lyapunov 函数

$$V(t) = x^{\mathrm{T}}Px + \frac{1}{1-\overline{m}_1}\int_{t-d_1}^{t} x(\theta)^{\mathrm{T}}(I+M)x(\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-d_2}^{t} x^{\mathrm{T}}(\theta)PB(R^{-1} + R^{-1}YR^{-1})B^{\mathrm{T}}Px(\theta)\mathrm{d}\theta$$

则对于 $c_1, c_2>0$,有

$$c_1\|x(t)\|^2 \leqslant V(t) \leqslant \sup_{-d\leqslant\theta\leqslant 0} c_2\|x(t+\theta)\|^2$$

且 V 沿闭环方程(5.3.4)解轨迹的导数为

$$\dot{V} = 2x^{\mathrm{T}}P(Ax + \Delta Ax - \frac{1}{\varepsilon}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px - \frac{1}{\varepsilon}\Delta BR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px) + 2x^{\mathrm{T}}P(A_dx_{d_1} + \Delta A_dx_{d_1} - \frac{1}{\varepsilon}B_dR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2} - \frac{1}{\varepsilon}\Delta B_dR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2}) + \frac{1}{1-\overline{m}_1}x^{\mathrm{T}}(I+M)x - \frac{1-\dot{d}_1}{1-\overline{m}_1}x_{d_1}^{\mathrm{T}}(I+M)x_{d_1} + \frac{1}{\varepsilon}x^{\mathrm{T}}PB(R^{-1} + R^{-1}YR^{-1})B^{\mathrm{T}}Px - \frac{1-\dot{d}_2}{\varepsilon}x_{d_2}^{\mathrm{T}}PB(R^{-1} + R^{-1}YR^{-1})B^{\mathrm{T}}Px_{d_2} \tag{5.3.5}$$

其中 $x_{d_1} = x(t-d_1)$,$x_{d_2} = x(t-d_2)$。利用不等式(5.1.18),我们可得

$$2x^{\mathrm{T}}P\Delta Ax = 2x^{\mathrm{T}}P\sum_{i=1}^{k_1}d_ie_i^{\mathrm{T}}r_i(t)x \leqslant \overline{r}\sum_{i=1}^{k_1}x^{\mathrm{T}}Pd_id_i^{\mathrm{T}}Px + \overline{r}\sum_{i=1}^{k_1}x^{\mathrm{T}}e_ie_i^{\mathrm{T}}x \leqslant x^{\mathrm{T}}PTPx + x^{\mathrm{T}}Ux$$

$$-2x^{\mathrm{T}}P\Delta BR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px = -2x^{\mathrm{T}}P\sum_{i=1}^{k_2}f_ig_i^{\mathrm{T}}s_i(t)R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px \leqslant x^{\mathrm{T}}PWPx + x^{\mathrm{T}}BR^{-1}VR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px$$

$$2x^{\mathrm{T}}P\Delta A_dx_{d_1} = 2x^{\mathrm{T}}P\sum_{i=1}^{k_3}l_iq_i^{\mathrm{T}}v_i(t)x_{d_1} \leqslant x^{\mathrm{T}}PHPx + x_{d_1}^{\mathrm{T}}Mx_{d_1}$$

$$-2x^{\mathrm{T}}P\Delta B_dR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2} = -2x^{\mathrm{T}}P\sum_{i=1}^{k_4}h_iw_i^{\mathrm{T}}z_i(t)R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2} \leqslant \frac{1}{1-\overline{m}_2}x^{\mathrm{T}}PZPx + (1-\overline{m}_2)x_{d_2}^{\mathrm{T}}PBR^{-1}YR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2}$$

$$2x^{\mathrm{T}}PA_dx_{d_1} \leqslant x^{\mathrm{T}}PA_dA_d^{\mathrm{T}}Px + x_{d_1}^{\mathrm{T}}x_{d_1}$$

因此,式(5.3.5)成为

$$\begin{aligned}\dot{V} \leqslant\ & x^{\mathrm{T}}\left(PA + A^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{1-\overline{m}_1}I + \frac{1}{1-\overline{m}_1}M + U\right)x + x^{\mathrm{T}}P(T + A_dA_d^{\mathrm{T}} + H)Px - \\ & \frac{1}{\varepsilon}x^{\mathrm{T}}P\left(BR^{-1}B^{\mathrm{T}} - BR^{-1}(V+Y)R^{-1}B^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1-\overline{m}_2}Z - W\right)Px - \frac{2}{\varepsilon}x^{\mathrm{T}}PB_dR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2} - \\ & \frac{1-\overline{m}_2}{\varepsilon}x_{d_2}^{\mathrm{T}}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2} = x^{\mathrm{T}}\hat{S}x - \frac{2}{\varepsilon}x^{\mathrm{T}}PB_dR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2} - \frac{1-\overline{m}_2}{\varepsilon}x_{d_2}^{\mathrm{T}}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2} = \\ & \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{\varepsilon}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \hat{S} & -PB_dR^{-1} \\ -R^{-1}B_d^{\mathrm{T}}P & -(1-\overline{m}_2)\varepsilon R^{-1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{\varepsilon}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

其中

$$\hat{S} = PA + A^{\mathrm{T}}P - P\left[\hat{R} + \frac{1}{\varepsilon(1-\overline{m}_2)}B_dR^{-1}B_d^{\mathrm{T}}\right]P + U + \frac{1}{1-\overline{m}_1}M + \frac{1}{1-\overline{m}_1}I$$

如果

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - P\hat{R}P + U + \frac{1}{1-\overline{m}_1}M + \frac{1}{1-\overline{m}_1}I < 0$$

则由 Schur 补引理,式(5.3.6)的矩阵负定。这样,如果对某正数 $\varepsilon > 0$,方程(5.3.2)存在正定解 $P > 0$,则存在某正数 c_3,使得

$$\dot{V}(t) \leqslant -c_3 \left\| \left[x \quad \frac{1}{\varepsilon}B^{\mathrm{T}}Px_{d_2}\right]^{\mathrm{T}} \right\|^2 \leqslant -c_3\|x\|^2 < 0$$

由 Lyapunov 稳定性理论(定理 1.4.5),闭环系统(5.3.1)和(5.3.3)是渐近稳定的。至此,我们证明了如下定理。

【定理 5.3.1】 对于不确定时滞系统(5.3.1),如果对某正数 ε,Riccati 方程(5.3.2)存在正定解 $P > 0$,则式(5.3.3)为不确定时滞系统(5.3.1)的无记忆线性状态反馈镇定控制器。

【例 5.3.1】 考虑系统(5.3.1),其中

$$d_1 = d_2,\ \dot{d}_1 < 0.1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix},\ B_d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Delta A(r) = \begin{bmatrix} r & r \\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \Delta B(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ s\end{bmatrix},\ \Delta A_d(v) = \begin{bmatrix} v & v \\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \Delta B_d(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ z\end{bmatrix}$$

且 $|r|, |s|, |v|, |z| \leqslant 0.1$。取 $A_1 = d_1e_1^{\mathrm{T}}, B_1 = f_1g_1^{\mathrm{T}}, A_{d_1} = l_1q_1^{\mathrm{T}}$ 和 $B_{d_1} = h_1w_1^{\mathrm{T}}$,其中

$$d_1 = l_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0\end{bmatrix},\ e_1 = q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix},\ f_1 = h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix},\ g_1 = 1,\ w_1 = 1$$

和 $\bar{r} = \bar{s} = \bar{v} = \bar{z} = 0.1$。取 $R = 1$、$Q = I_2$ 和 $\varepsilon = 0.125$,则 Riccati 方程(5.3.2)的正定解为

$$P = \begin{bmatrix} 7.351\ 11 & 2.132\ 908 \\ 2.132\ 908 & 0.869\ 719\end{bmatrix}$$

相应的镇定控制器为

$$u = -17.063\ 262x_1 - 6.957\ 748x_2$$

5.3.2 不确定线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制

考虑不确定线性时滞系统

$$\dot{x}(t)=[A_0+\Delta A_0(t)]x(t)+[A_1+\Delta A_1(t)]x(t-d)+B_1w(t)+[B_2+\Delta B_2(t)]u(t) \tag{5.3.7a}$$

$$z(t)=Cx(t) \tag{5.3.7b}$$

$$x(t)=\phi(t),t\in[-d,0] \tag{5.3.7c}$$

其中 $x(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态，$u(t)\in\mathbf{R}^p$ 为控制输入，$w(t)\in\mathbf{R}^r$ 为干扰输入，且 $w(t)\in L_2[0,\infty)$，$z(t)\in\mathbf{R}^m$为被控输出，A_0,A_1,B_1,B_2 和 C 为具有适当维数的已知常值矩阵，$\Delta A_0(\cdot),\Delta A_1(\cdot)$ 和 $\Delta B_2(\cdot)$为实值连续时变不确定性矩阵，$d\geqslant 0$ 为常值时滞，$\phi(t)\in C[-d,0]$为向量值初始函数。

假设参数不确定性满足匹配和范数有界条件

$$\begin{aligned}&[\Delta A_0(t)\quad \Delta B_2(t)]=HF(t)[E_0\quad E_2]\\&\Delta A_1(t)=H_1F(t)E_1\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

其中 H、H_1、E_0、E_1 和 E_2 为具有适当维数的常阵，$F(t)\in\mathbf{R}^{i\times j}$为未知 Lebesgue 可测函数，且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I \tag{5.3.9}$$

如果取如下形式的无记忆状态反馈控制律

$$u(t)=-Kx(t) \tag{5.3.10}$$

则导致的闭环系统为

$$\dot{x}(t)=[A_0-B_2K+HF(t)(E_0-E_2K)]x(t)+[A_1+\Delta A_1(t)]x(t-d)+B_1w(t) \tag{5.3.11}$$

【定义 5.3.1】 如果存在正定对称阵 $P_1,R\in\mathbf{R}^{n\times n}$和常数 $\alpha>0$，使得对任意满足式(5.3.9)的不确定性 $F(\cdot)$，Lyapunov 函数

$$V(x_t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-d}^{t}x^{\mathrm{T}}(\tau)Rx(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.3.12}$$

沿闭环系统(5.3.11)($w(t)=0$)的解轨迹的导数满足

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_t)=&x^{\mathrm{T}}(t)[P(A_0-B_2K)+(A_0-B_2K)^{\mathrm{T}}P+R]x(t)+2x^{\mathrm{T}}(t)PHF(t)(E_0-E_2K)x(t)-\\&2x^{\mathrm{T}}(t)P[A_1+\Delta A_1(t)]x(t-d)-x^{\mathrm{T}}(t-d)Rx(t-d)\leqslant-2\|x(t)\|^2\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

则称闭环系统(5.3.11)是二次稳定的。此时，也称系统(5.3.7)~(5.3.9)是无记忆二次可镇定的。

【问题 5.3.1】 设计无记忆状态反馈控制律(5.3.10)，使闭环系统对任意 $d\geqslant 0$ 和满足式(5.3.9)的不确定性 $F(\cdot)$成立：

(1) 闭环系统(5.3.11)内稳定。

(2) 在零初始条件下，被控输出 $z(t)$满足

$$\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|w(t)\|_2 \tag{5.3.14}$$

首先讨论时滞系统(5.3.7a)的鲁棒镇定问题。

【引理 5.3.1】 给定矩阵 $F\in\mathbf{R}^{p\times q}$，满足 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$，则

$$2x^{\mathrm{T}}Fy \leqslant x^{\mathrm{T}}x + y^{\mathrm{T}}y \tag{5.3.15}$$

对所有 $x\in \mathbf{R}^p$ 和 $y\in \mathbf{R}^q$ 成立。

【定理 5.3.2】 如果存在常值矩阵 $K\in \mathbf{R}^{p\times n}$ 和 $P>0$,使得 Riccati 不等式

$$S = PA_K + A_K^{\mathrm{T}}P + PMP + (E_0 - E_2K)^{\mathrm{T}}(E_0 - E_2K) + E_1^{\mathrm{T}}E_1 + I < 0 \tag{5.3.16}$$

成立。其中 $A_K = A - B_2K, M = HH^{\mathrm{T}} + H_1H_1^{\mathrm{T}} + A_1A_1^{\mathrm{T}}$,则系统(5.3.7)~(5.3.9)是二次可镇定的。

【证明】 考虑 Lyapunov 函数

$$V(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(\tau)Rx(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.3.17}$$

其中 $R = I + E_1^{\mathrm{T}}E_1$。$V(x_t)$沿闭环系统(5.3.11)的解轨迹的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_t) = L(x_t,t) = {} & x^{\mathrm{T}}(t)(PA_K + A_K^{\mathrm{T}}P + R)x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PHF(t)(E_0 - E_2K)x(t) + \\ & 2x^{\mathrm{T}}(t)PA_1x(t-d) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PH_1F(t)E_1x(t-d) - x^{\mathrm{T}}(t-d)Rx(t-d)\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

由引理 5.3.1,有

$$\begin{aligned}2x^{\mathrm{T}}(t)PHF(t)(E_0 - E_2K)x(t) \leqslant {} & x^{\mathrm{T}}(t)PHH^{\mathrm{T}}Px(t) + \\ & x^{\mathrm{T}}(t)(E_0 - E_2K)^{\mathrm{T}}(E_0 - E_2K)x(t)\end{aligned}$$

$$2x^{\mathrm{T}}(t)PA_1x(t-d) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)PA_1A_1^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t-d)x(t-d)$$

$$2x^{\mathrm{T}}(t)PH_1F(t)E_1x(t-d) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)PH_1H_1^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t-d)E_1^{\mathrm{T}}E_1x(t-d)$$

将以上不等式代入式(5.3.18),整理且利用式(5.3.16),我们得到

$$L(x_t,t) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)Sx(t) \leqslant \lambda_{\max}(S)x^{\mathrm{T}}x < 0 \tag{5.3.19}$$

取 $\alpha = -\lambda_{\max}(S) > 0$,则不等式(5.3.9)成立。 证毕

接下来讨论系统(5.3.7)的 H_∞ 性能设计问题。

【定理 5.3.3】 给定 $\gamma>0$,如果存在 K 和正定对称阵 $P>0$,使得 Riccati 不等式

$$T = PA_K + A_K^{\mathrm{T}}P + P(M + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}})P + (E_0 - E_2K)^{\mathrm{T}}(E_0 - E_2K) + E_1^{\mathrm{T}}E_1 + C^{\mathrm{T}}C + I < 0 \tag{5.3.20}$$

则问题 5.3.1 有解。

【证明】 由于不等式(5.3.20)隐含不等式(5.3.16),故根据定理 5.3.2,闭环系统(5.3.11)(取 $w(t)=0$)是二次稳定的。

为了建立 $z(t)$ 的 $L_2[0,\infty)$ 范数的上界 $\gamma\|w(t)\|_2$,假设初态 $x(t)=0, t\in[-d,0]$,并引进函数

$$J = \int_0^\infty [z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)]\mathrm{d}t$$

因为闭环系统是二次稳定的,对任意的非零 $w(t)\in L_2[0,\infty)$,我们有

$$J = \int_0^\infty \left[z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_t)\right]\mathrm{d}t - x^{\mathrm{T}}(\infty)Px(\infty) - V_\infty$$

其中

$$V_\infty \leqslant \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(\tau)Rx(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant 0$$

于是

$$J \leqslant \int_0^\infty (x^T(t)C^TCx(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + L(x_t, t)]dt$$

由于 $w(t) \neq 0$,不等式(5.3.19)应为

$$L(x_t, t) \leqslant x^T(t)Sx(t) + 2x^T(t)PB_1w(t)$$

由上式和 $P > 0$,进一步得到

$$J \leqslant \int_0^\infty [x^T(t)(S + C^TC)x(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + 2x^T(t)PB_1w(t)]dt \quad (5.3.21)$$

根据引理5.3.1可知

$$2x^T(t)PB_1w(t) \leqslant \gamma^{-2}x^T(t)PB_1B_1^TPx(t) + \gamma^2 w^T(t)w(t)$$

将上式代入式(5.3.21),并利用式(5.3.20),得

$$J \leqslant \int_0^\infty x^T(t)(S + C^TC + \gamma^{-2}PB_1B_1^TP)x(t)dt = \int_0^\infty x^T(t)Tx(t)dt \leqslant 0$$

因此 $\| z(t) \|_2 \leqslant \gamma \| w(t) \|_2$ 对任意非零 $w(t) \in L_2[0, \infty)$ 成立。 **证毕**

最后,给出鲁棒 H_∞ 控制器设计方法。

我们将采用矩阵的满秩分解技术来设计控制器,并将控制器的设计转换为4.4.3小节的状态反馈 H_∞ 标准控制问题。

首先,设 $i = \text{rank}(E_2)$,并令 $U \in \mathbf{R}^{j \times i}$ 和 $V \in \mathbf{R}^{i \times p}$ 为具有如下性质的任意矩阵

$$E_2 = UV, \text{rank}(U) = \text{rank}(V) = i \quad (5.3.22)$$

其次,选择 $\Phi \in \mathbf{R}^{(p-i) \times p}$,满足

$$\Phi V^T = 0, \Phi\Phi^T = I \quad (\text{取 } \Phi = 0, \text{如果 } i = p) \quad (5.3.23)$$

定义

$$\Xi = V^T(VV^T)^{-1}(V^TV)^{-1}(UU^T)^{-1}V \quad (5.3.24)$$

【定理5.3.4】 给定 $\gamma > 0$,矩阵 $Q > 0$,按式(5.3.23)选择 $\Phi \in \mathbf{R}^{(p-i) \times p}$,则定理5.3.3中条件成立的充分必要条件为存在 $\varepsilon > 0$,使得Riccati方程

$$(A_0 - B_2\Xi E_2^TE_0)^TP + P(A_0 - B_2\Xi E_2^TE_0) + P(HH^T + H_1H_1^T) + A_1A_1^T + \gamma^2 B_1B_1^T -$$

$$B_2\Xi B_2^T - \frac{1}{\varepsilon}B_2\Phi^T\Phi B_2^T)P + E_1^TE_1 + C^TC + I + E_0^T(I - E_2\Xi E_2^T)E_0 + \varepsilon Q = 0 \quad (5.3.25)$$

有正定解 $P > 0$。如果这样的解存在,则系统(5.3.7)~(5.3.9)的鲁棒 H_∞ 控制律为

$$u(t) = -Kx(t)$$

其中

$$K = (\frac{1}{2\varepsilon}\Phi^T\Phi + \Xi B_2^T)P + \Xi E_2^TE_0 \quad (5.3.26)$$

【证明】 充分性。设Riccati方程(5.3.25)对某 $\varepsilon > 0$ 存在解 $P > 0$,可证明反馈阵(5.3.26)使式(5.3.20)的 $T < 0$。事实上,将反馈阵(5.3.26)代入式(5.3.20),并利用式(5.3.25),可得

$$T = -\varepsilon Q < 0$$

因此,定理5.3.3中条件成立。

必要性。设定理5.3.3中条件成立,即存在 $K \in \mathbf{R}^{p \times n}$ 和正定对称阵 $P > 0$,使式(5.3.20)成立。定义

$$D = [H \quad H_1 \quad A_1 \quad \gamma^{-1}B_1]$$

$$\bar{E}_1 = [E_1^T \quad C^T \quad I \quad E_0^T]^T$$

$$\overline{E}_2=[0\quad 0\quad 0\quad E_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

则式(5.3.20)可改写为

$$P(A_0-B_2K)+(A_0-B_2K)^{\mathrm{T}}P+PDD^{\mathrm{T}}P+(\overline{E}_1-\overline{E}_2K)^{\mathrm{T}}(\overline{E}_1-\overline{E}_2K)<0$$

根据定理 4.3.9,由上式可得存在 K 使得 A_0-B_2K 是稳定的,且

$$\|(\overline{E}_1-\overline{E}_2K)(sI-A_0+B_2K)^{-1}D\|_\infty\leqslant 1$$

最后,根据定理 4.4.6,Riccati 方程(5.3.25)对某 $\varepsilon>0$ 存在正定解 $P>0$。 **证毕**

注 在标称情况(无不确定性),即 $H=0$、$H_1=0$、$E_1=0$ 和 $E_2=0$,Riccati 方程(5.3.25)退化为

$$A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0+P(A_1A_1^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\varepsilon}B_2R^{-1}B_2^{\mathrm{T}})P+C^{\mathrm{T}}C+I+\varepsilon Q=0$$

其中 $R^{-1}=\Phi^{\mathrm{T}}\Phi>0$,相应的无记忆状态反馈控制律为

$$K=\frac{1}{2\varepsilon}R^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P$$

以上结果平行于 5.1 的结果。

5.4 非线性不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制

众所周知,实际控制系统除具有时滞特性外,严格地讲,还具有非线性特性。只是为了分析与设计简便,人们才采用线性化模型。因此,将模型中的不确定性部分(模型误差)描述为非线性函数更能反映实际情况。本节所考虑的系统模型为

$$\dot{x}(t)=A_1x(t)+\Delta f_1(x(t),t)-A_2x(t-d)+\Delta f_2(x(t-d),t)+B_1w(t)+B_2u(t)+\Delta g(x(t),t)u(t) \tag{5.4.1a}$$

$$z(t)=Cx(t)+Du(t) \tag{5.4.1b}$$

$$x(t)=\phi(t),t\in[-d,0] \tag{5.4.1c}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量,$u\in\mathbf{R}^p$ 为控制输入,$w\in\mathbf{R}^r$ 为干扰输入,$z\in\mathbf{R}^m$ 为被控输出,A_1、A_2、B_1、B_2、C、D 为具有适当维数的定常矩阵,Δf_1,Δf_2 和 Δg 为具有适当维数的非线性连续可微函数。

【假设 5.4.1】 非线性不确定函数 Δf_1 和 Δf_2 具有如下形式

$$\Delta f_1(x(t),t)=E_1\delta_f(x(t),t) \tag{5.4.2a}$$

$$\Delta f_2(x(t-d),t)=E_2\delta_f(x(t-d),t) \tag{5.4.2b}$$

其中 E_1、E_2 为已知定常矩阵,$\delta_f(\cdot,\cdot)$为未知非线性连续可微函数向量,且满足增益有界条件

$$\|\delta_f(x(t),t)\|\leqslant\|W_fx(t)\|,\forall x\in\mathbf{R}^n,\forall t\in\mathbf{R} \tag{5.4.3}$$

这里 W_f 为加权矩阵,$\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 范数。

【假设 5.4.2】 令 $u(t)=0$,$w(t)=0$,自由系统(5.4.1a)在式(5.4.1c)的初始条件下,对满足式(5.4.2)的任意 Δf_1 和 Δf_2 以及任意 $d\geqslant 0$ 有解。

事实上,假设 5.4.1 的式(5.4.3)隐含

$$\|\delta_f(x(t-d),t)\|\leqslant\|W_fx(t-d)\|,\forall x(t-d),\forall t,\forall d\geqslant 0 \tag{5.4.4}$$

和 $\delta_f(0,t)=0$,$\forall t\in\mathbf{R}$。即 $x(t)=0$ 是自由系统的一个平衡点。

【定义 5.4.1】 令 $u(t)=0$。考虑系统(5.4.1)。给定 $\gamma>0$,对满足式(5.4.3)的任意 Δf_1

和 Δf_2,如下条件成立:

(1) 当 $w(t)=0$ 时,自由系统的平衡点 $x(t)=0$ 渐近稳定。

(2) 对初始条件 $x(t)=0, t\in[-d,0]$,有 $\|z(t)\|_T<\gamma^2\|w(t)\|_T, \forall T>0$,即具有有限的 L_2 增益,则称系统具有鲁棒 H_∞ 性能。

不失一般性,取 $\gamma=1$。

【问题 5.4.1】 对于系统(5.4.1),求无记忆状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) \tag{5.4.5}$$

使闭环系统(5.4.1)和(5.4.5)具有鲁棒 H_∞ 性能。

5.4.1 鲁棒 H_∞ 性能设计

首先,我们考虑具有非线性不确定性的时滞系统(5.4.1)的鲁棒稳定性问题。为此,考虑自由系统,即令 $u(t)=0$ 和 $w(t)=0$。

【引理 5.4.1】 设 $x(t)=0$ 为自由系统(5.4.1)的一个平衡点。如果存在适当的标量 $\lambda_f>0$,使得 Riccati 不等式

$$A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1^{\mathrm{T}} + \lambda_f^2 PB_sB_s^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\lambda_f^2}C_s^{\mathrm{T}}C_s < 0 \tag{5.4.6}$$

存在正定对称解 P,其中

$$B_s=[E_1 \quad E_2 \quad A_2],\ C_s=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\,W_f\\ I\end{bmatrix}$$

则自由系统(5.4.1)对满足式(5.4.3)的任意 Δf_1 和 Δf_2,平衡点 $x(t)=0$ 对任意 $d\geqslant 0$ 是渐近稳定的。

【证明】 令 $x(t)=x(t,\phi)$表示自由系统(5.4.1a)在初始条件(5.4.1c)下的解。对任意满足式(5.4.3)的 Δf_1 和 Δf_2,取如下 Lyapunov 函数

$$V(x,t)=x^{\mathrm{T}}Px+\int_{t-d}^{t}\frac{1}{\lambda_f^2}\{(\|W_fx(t,\phi)\|^2-\|\delta_f(x(\tau,\phi))\|^2)+x^{\mathrm{T}}Qx\}\mathrm{d}\tau \tag{5.4.7}$$

其中 P、Q 为正定对称矩阵. 计算 $V(x,t)$沿方程(5.4.1a)解轨迹的导数,得

$$\dot V(x,t)=x^{\mathrm{T}}(A_1^{\mathrm{T}}P+PA_1)x+2x^{\mathrm{T}}PB_s\begin{bmatrix}\delta_f(x,t)\\ \delta_f(x(t-d),t)\\ x(t-d)\end{bmatrix}+\frac{1}{\lambda_f^2}(\|W_fx\|^2-\|\delta_f(x,t)\|^2)-$$

$$\frac{1}{\lambda_f^2}(\|W_fx(t-d)\|^2-\|\delta_f(x(t-d),t)\|^2)+\frac{1}{\lambda_f^2}(x^{\mathrm{T}}Qx-x^{\mathrm{T}}(t-d)Qx(t-d))$$

令 $Q=W_f^{\mathrm{T}}W_f+I>0$,利用式(5.4.3)、(5.4.4)和式(5.4.6),以及配方运算,最后得

$$\dot V(x,t)=-\|\lambda_fE_1^{\mathrm{T}}Px-\frac{1}{\lambda_f}\delta_f(x,t)\|^2-\|\lambda_fE_2^{\mathrm{T}}Px-\frac{1}{\lambda_f}\delta_f(x(t-d),t)\|^2+\|\lambda_fA_2^{\mathrm{T}}Px-$$

$$\frac{1}{\lambda_f}x(t-d)\|^2-\frac{1}{\lambda_f}(\|W_fx(t-d)\|^2)-\|\delta_f(x(t-d),t)\|^2)\leqslant 0 \tag{5.4.8}$$

由于式(5.4.8)对满足式(5.4.3)的任意 Δf_1 和 Δf_2 以及 $d\geqslant 0$ 均成立,故由 Lyapunov 稳定性理论,引理 5.4.1 得证。 证毕

关于定义 5.4.1 给出的鲁棒 H_∞ 性能设计问题的求解,我们有如下定理。

【定理 5.4.1】 如果存在适当的标量 $\lambda_f>0$,使得 Riccati 不等式

$$A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1 + P\overline{B}_s\overline{B}_s^{\mathrm{T}}P + \overline{C}_s^{\mathrm{T}}\overline{C}_s < 0 \tag{5.4.9}$$

存在正定对称解 P,其中

$$\overline{B}_s = [B_1 \quad \lambda_f B_s],\ \overline{C}_s = \begin{bmatrix} C \\ \frac{1}{\lambda_f}C_s \end{bmatrix}$$

则系统(5.4.1)(取 $u(t)=0$)具有鲁棒 H_∞ 性能。

【证明】 显然,不等式(5.4.9)隐含不等式(5.4.6),故由引理 5.4.1,当 $w(t)=0$ 时,自由系统(5.4.1a)的平衡点 $x(t)=0$ 是渐近稳定的。

定义辅助函数

$$J(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^{\mathrm{T}}Px + \|z\|^2 - \|w\|^2 + \frac{1}{\lambda_f^2}\int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^{\mathrm{T}}Px + \|z\|^2 - \|w\|^2 + \frac{1}{\lambda_f^2}x^{\mathrm{T}}(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x - \frac{1}{\lambda_f^2}x(t-d)(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x(t-d)$$

利用式(5.4.9),有

$$J(x) = x^{\mathrm{T}}(A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1)x + 2x^{\mathrm{T}}P\overline{B}_s\overline{D} + \|z\|^2 - \|w\|^2 + \frac{1}{\lambda_f^2}x^{\mathrm{T}}(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x - \frac{1}{\lambda_f^2}x^{\mathrm{T}}(t-d)(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x(t-d) < -x^{\mathrm{T}}P\overline{B}_s\overline{B}_s^{\mathrm{T}}Px - x^{\mathrm{T}}\overline{C}_s^{\mathrm{T}}\overline{C}_s x + 2x^{\mathrm{T}}P\overline{B}_s\overline{D} + \|z\|^2 - \|w\|^2 + \frac{1}{\lambda_f^2}x^{\mathrm{T}}(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x - \frac{1}{\lambda_f^2}x^{\mathrm{T}}(t-d)(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x(t-d)$$

其中

$$\overline{D}^{\mathrm{T}} = [W^{\mathrm{T}} \quad \frac{1}{\lambda_f}\delta_f^{\mathrm{T}}(x,t) \quad \frac{1}{\lambda_f}\delta_f^{\mathrm{T}}(x(t-d),t) \quad \frac{1}{\lambda_f}x^{\mathrm{T}}(t-d)]$$

经配方运算,得

$$J(x) < -\|\overline{B}_s^{\mathrm{T}}Px - \overline{D}\|^2 + \overline{D}^{\mathrm{T}}\overline{D} - x^{\mathrm{T}}\overline{C}_s^{\mathrm{T}}\overline{C}_s x + \|z\|^2 - \|w\|^2 + \frac{1}{\lambda_f^2}x^{\mathrm{T}}(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x - \frac{1}{\lambda_f^2}x^{\mathrm{T}}(t-d)(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x(t-d)$$

将 $\overline{C}_s$ 代入上式,并利用式(5.4.3)和式(5.4.4),最后得

$$J(x) < -\|\overline{B}_s^{\mathrm{T}}Px - \overline{D}\|^2 - \frac{1}{\lambda_f^2}(\|W_f x\|^2 - \|\delta_f(x,t)\|^2) - \frac{1}{\lambda_f^2}(\|W_f x(t-d)\|^2 - \|\delta_f(x(t-d),t)\|^2) \leqslant 0 \tag{5.4.10}$$

对于给定的 $T>0$,对式(5.4.10)从 0 到 T 积分,得

$$\|z\|_T^2 - \|w\|_T^2 + x^{\mathrm{T}}(T)Px(T) + \frac{1}{\lambda_f^2}\Gamma < 0$$

其中

$$\Gamma = \int_{T-d}^{T} x^{\mathrm{T}}(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x\,\mathrm{d}\tau \geqslant 0$$

因此,对任意的 Δf_1 和 Δf_2, $\|z\|_T \leqslant \|w\|_T$。 **证毕**

注 如果不确定性函数 Δf_1 和 Δf_2 是线性的,即令 $\Delta f_1 = E_1\Sigma(t)W_f x = E_1\delta_f(x,t)$, $\Delta f_2 = E_2\Sigma(t)W_f x = E_2\delta_f(x,t)$, $\Sigma^{\mathrm{T}}(t)\Sigma(t) \leqslant I$。显然,$\delta_f$ 满足增益有界条件。所以,根据定理5.4.1,如果式(5.4.9)成立,则系统具有鲁棒 H_∞ 性能。线性系统的这一结果(取 $\lambda_f = 1$)等价

于定理 5.5.3 的条件(5.3.20),其中取 $u(t)=-Kx(t)=0,\Delta B_2(t)=0,\gamma=1$。因此,定理 5.4.1 的结果是线性情形的一种推广。

5.4.2 状态反馈控制律设计

接下来,我们讨论问题 5.4.1 的求解,即讨论闭环系统满足鲁棒 H_∞ 性能的条件以及状态反馈控制律的求解。首先,对式(5.4.1)中的不确定函数 Δg 做如下假设。

【假设 5.4.3】 非线性不确定函数 Δg 具有如下形式

$$\Delta g(x(t),t) = E_g\delta_g(x(t),t) \tag{5.4.11}$$

其中 E_g 为已知定常矩阵,$\delta_g(\cdot,\cdot)$为未知非线性连续可微函数向量,且满足增益有界条件

$$\|\delta_g(x,t)u\| \leqslant \|Wu\|,\forall x\in\mathbf{R}^n,\forall u\in\mathbf{R}^p,\forall t\in\mathbf{R} \tag{5.4.12}$$

其中 W_g 为加权矩阵。

将式(5.4.5)的 $u(t)$代入式(5.4.1),得闭环系统方程

$$\dot{x} = A_Kx + \Delta\tilde{f}_1(x,t) + A_2x(t-d) + \Delta\tilde{f}_2(x(t-d),t) + B_1w(t) \tag{5.4.13a}$$

$$z = C_Kx \tag{5.4.13b}$$

其中

$$A_K = A_1 + B_2K, C_K = C + DK, \Delta\hat{f}_1(x,t) = \widetilde{E}_1\tilde{\delta}(x,t)$$

$$\Delta\tilde{f}_2(x(t-d),t) = \widetilde{E}_2\tilde{\delta}(x(t-d),t), \widetilde{E}_1 = [E_1 \quad \lambda_g E_g], \widetilde{E}_2 = [E_2 \quad 0]$$

$$\tilde{\delta}(x,t) = \begin{bmatrix} \delta_f(x,t) \\ \frac{1}{\lambda_g}\delta_g(x,t)Kx \end{bmatrix}$$

令

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} W_f \\ \frac{1}{\lambda_g}W_gK \end{bmatrix}$$

则有

$$\|\tilde{\delta}\|^2 = \|\delta_f\|^2 + \frac{1}{\lambda_g^2}\|\delta_gKx\|^2 \leqslant \|W_fx\|^2 + \frac{1}{\lambda_g^2}\|W_gKx\|^2 = \|\widetilde{W}x\|^2 \tag{5.4.14}$$

且 $\tilde{\delta}(0,t)=0,\forall t\in\mathbf{R}$。

由定理 5.4.1,如果存在适当的标量 $\lambda_f>0,\lambda_g>0$,使得 Riccati 不等式

$$A_K^{\mathrm{T}}P + PA_K + P\widetilde{B}_s\widetilde{B}_sP + \widetilde{C}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{C}_s < 0 \tag{5.4.15}$$

存在正定对称解 P,其中

$$\widetilde{B}_s = [B_1 \quad \lambda_f\widetilde{B}], \widetilde{C}_s = \begin{bmatrix} C_K \\ \frac{1}{\lambda_f}\widetilde{C} \end{bmatrix}, \widetilde{B} = [\widetilde{E}_1 \quad \widetilde{E}_2 \quad A_2], \widetilde{C} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\,\widetilde{W} \\ I \end{bmatrix}$$

则闭环系统(5.4.13)具有鲁棒 H_∞ 性能。整理式(5.4.15),得

$$A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1 + P\widetilde{B}_s\widetilde{B}_s^{\mathrm{T}}P + \widetilde{C}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{C}_s + K^{\mathrm{T}}(B_2^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}C) + (PB_2 + C^{\mathrm{T}}D)K + K^{\mathrm{T}}\widetilde{R}K < 0 \tag{5.4.16}$$

其中 $\widetilde{R} = \widetilde{D}^{\mathrm{T}}\widetilde{D}, \widetilde{D}^{\mathrm{T}} = [D^{\mathrm{T}} \quad \frac{\sqrt{2}}{\lambda_f\lambda_g}W_g^{\mathrm{T}}]$。若取

$$K = -\widetilde{R}^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}P - D^{\mathrm{T}}C) \tag{5.4.17}$$

则式(5.4.16)成为

$$A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1 + P\widetilde{B}_s\widetilde{B}_s^{\mathrm{T}}P + \widetilde{C}_s^{\mathrm{T}}\widetilde{C}_s - (PB_2 + C^{\mathrm{T}}D)\widetilde{R}^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}C) < 0 \tag{5.4.18}$$

综合上面的讨论,可得如下定理。

【定理 5.4.2】 考虑闭环系统(5.4.1)和(5.4.5)。设 D 列满秩。如果存在适当的标量 $\lambda_f > 0, \lambda_g > 0$,使得 Riccati 不等式(5.4.18)存在正定对称解 P,则闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能,且所求状态反馈控制律为式(5.4.17)。

【例 5.4.1】 考虑系统(5.4.1),其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$$

$$D_1 = 1, E_1 = E_2 = E_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, W_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, W_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta_f = \begin{bmatrix} \sin x_1(t) \\ \sin x_2(t) \end{bmatrix}, \delta_g = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos x_1(t) \end{bmatrix}$$

试设计鲁棒 H_∞ 控制器。

【解】 可验证 δ_f、δ_g 满足增益有界条件。取 $\lambda_f = 0.5, \lambda_g = 5$,解式(5.4.18)的 Riccati 不等式,得

$$P = \begin{bmatrix} 3.701 & -1.131 \\ -1.131 & 1.868 \end{bmatrix} > 0$$

由定理 5.4.2,控制律(5.4.17)使得闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能。其中 $K = [0.860 \quad -2.180]$。

5.5 基于 LMI 的状态反馈解

本节我们利用 LMI 方法,讨论同时具有状态和输入时滞的广义时滞系统的状态反馈 H_∞ 控制器的设计问题。在较一般的情形下,给出了时滞系统的 H_∞ 控制问题的解。所考虑的广义时滞系统的状态空间描述为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d_1(t)) + B_1 w(t) + B_2 u(t) + B_d u(t - d_2(t)) \tag{5.5.1a}$$

$$z(t) = Cx(t) + C_d x(t - d_1(t)) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) + D_d u(t - d_2(t)) \tag{5.5.1b}$$

$$x(t) = 0, t < 0, x(0) = x_0 \tag{5.5.1c}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 是状态,$u \in \mathbf{R}^p$ 是控制输入,$w \in \mathbf{R}^r$ 是干扰输入,且 $w(t) \in L_2[0, \infty)$,$z \in \mathbf{R}^m$ 是被控输出。时变时滞 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 满足

$$0 \leqslant d_i < \infty, \dot{d}_i(t) \leqslant \overline{m}_i < 1, i = 1,2 \tag{5.5.2}$$

【问题 5.5.1】 对于时滞系统(5.5.1),设计状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) \tag{5.5.3}$$

使其成为时滞系统(5.5.1)的 H_∞ 控制器(参见定义 4.5.1)。

将式(5.5.3)代入式(5.5.1),得到从 $w(t)$到 $z(t)$的闭环系统

$$\dot{x}(t) = A_K x(t) + A_d x(t - d_1(t)) + B_1 w(t) + B_d K x(t - d_2(t)) \tag{5.5.4a}$$

$$z(t) = C_K x(t) + C_d x(t - d_1(t)) + D_{11} w(t) + D_d K x(t - d_2(t)) \tag{5.5.4b}$$

其中 $A_K = A + B_2 K, C_K = C + D_{12} K$。

【引理 5.5.1】 给定 $\gamma > 0$。如果存在正定矩阵 P、R_1 和 R_2,使得

$$\begin{bmatrix} A_K^T P + PA_K + R_1 + K^T R_2 K & PA_d & PB_d & PB_1 & C_K^T \\ A_d^T P & -\widetilde{R}_1 & 0 & 0 & C_d^T \\ B_d^T P & 0 & -\widetilde{R}_2 & 0 & D_d^T \\ B_1^T P & 0 & 0 & -\gamma^2 I & D_{11}^T \\ C_K & C_d & D_d & D_{11} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.5.5}$$

对时变时滞(5.5.2)成立,这里,$\widetilde{R}_i = (1 - \overline{m}_i) R_i, i = 1,2$ 为正定矩阵,则问题 5.5.1 有解。

【证明】 首先,定义 Lyapunov 函数

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) + \int_{t-d_1(t)}^{t} x^T(\tau) R_1 x(\tau) d\tau + \int_{t-d_2(t)}^{t} x^T(\tau) K^T R_2 K x(\tau) d\tau \tag{5.5.6}$$

注意到条件(5.5.5)隐含

$$\begin{bmatrix} A_K^T P + PA_K + R_1 + K^T R_2 K & PA_d & PB_d \\ A_d^T P & -\widetilde{R}_1 & 0 \\ B_d^T P & 0 & -\widetilde{R}_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{5.5.7}$$

求 Lyapunov 函数(5.5.6)沿闭环方程(5.5.4)解轨迹的导数,得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,t) = {} & \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) + x^T(t) R_1 x(t) + x^T(t) K^T R_2 K x(t) - (1 - \dot{d}_1(t)) x(t - \\ & d_1(t))^T R_1 x(t - d_1(t)) - (1 - \dot{d}_2(t) x^T(t - d_2(t)) K^T R_2 K x(t - d_2(t)) \leqslant \\ & \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) + x^T(t) R_1 x(t) + x^T(t) K^T R_2 K x(t) - (1 - \overline{m}_1) x^T(t - \\ & d_1(t)) R_1 x(t - d_1(t)) - (1 - \overline{m}_2) x^T(t - d_2(t)) K^T R_2 K x(t - d_2(t)) \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

设干扰输入 $w(t) = \mathbf{0}$,我们有

$$\dot{V}(x,t) \leqslant \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - d_1(t)) \\ Kx(t - d_2(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_K^T P + PA_K + R_1 + K^T R_2 K & PA_d & PB_d \\ A_d^T P & -\widetilde{R}_1 & 0 \\ B_d^T P & 0 & -\widetilde{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - d_1(t)) \\ Kx(t - d_2(t)) \end{bmatrix}$$

由式(5.5.7),得

$$\dot{V}(x,t) < 0$$

即闭环系统(5.5.4)是渐近稳定的。

接下来,假定初始状态为零,定义辅助函数

$$J = \int_0^{\infty} [z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t)] dt \tag{5.5.9}$$

则对任意非零 $w(t)\in L_2[0,\infty)$，有

$$J \leqslant \int_0^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t) + \dot{V}(x(t))]\mathrm{d}t \tag{5.5.10}$$

将式(5.5.8)代入式(5.5.10)，并令

$$\zeta(t) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d_1(t)) \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d_2(t))\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$$

则

$$J \leqslant \int_0^{\infty} \zeta^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\zeta(t)\mathrm{d}t$$

其中 $\boldsymbol{Z}$ 定义为

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{PA}_d + \boldsymbol{C}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d & \boldsymbol{PB}_d + \boldsymbol{C}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d & \boldsymbol{PB}_1 + \boldsymbol{C}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{11} \\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_K & \boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d - (1-\overline{m}_1)\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d & \boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{11} \\ \boldsymbol{B}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_K & \boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d & \boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d - (1-\overline{m}_2)\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{11} \\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_K & \boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d & \boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d & -\gamma^2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{11} \end{bmatrix} \tag{5.5.11}$$

这里 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PA}_K + \boldsymbol{C}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_K + \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{K}$。式(5.5.11)中 $\boldsymbol{Z}<\boldsymbol{0}$ 隐含对任意非零 $w(t)\in L_2[0,\infty)$，$\|z(t)\|_2 \leqslant \gamma\|w(t)\|_2$。因此，当 $\boldsymbol{Z}<\boldsymbol{0}$，$t\geqslant 0$ 时，控制律(5.5.3)是时滞系统(5.5.1)的 H_{∞} 控制器，即问题5.5.1有解。应用Schur补引理(引理4.4.3)，式(5.5.11)中的 $\boldsymbol{Z}<\boldsymbol{0}$ 可转换为式(5.5.5)。 **证毕**

下面的定理将不等式(5.5.5)转换为线性矩阵不等式(LMI)。

【定理5.5.1】 考虑时滞系统(5.5.1)。给定 $\gamma>0$，如果存在正定阵 $\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2$ 和矩阵 $\boldsymbol{M}$，使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} & -\gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{U}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{S}_1 \end{bmatrix} < \boldsymbol{0} \tag{5.5.12}$$

对满足式(5.5.2)的时滞成立，则控制律式(5.5.3)是时滞系统式(5.5.1)的 H_{∞} 控制器。这里

$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{QA}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{AQ} + \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M} + (1-\beta_1)^{-1}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}} + (1-\beta_2)^{-1}\boldsymbol{B}_d\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B}_d^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{12}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{QC}^{\mathrm{T}} + (1-\overline{m}_1)^{-1}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}} + (1-\overline{m}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_d\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{U}_3 = -\boldsymbol{I} + (1-\overline{m}_1)^{-1}\boldsymbol{C}_d\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}} + (1-\overline{m}_2)^{-1}\boldsymbol{D}_d\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{KP}^{-1}$

$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}$

$\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{R}_i^{-1}, i=1,2$

【证明】 应用Schur补引理和某些变量变换，可完成该定理的证明。不等式(5.5.5)等价于

$$
\begin{bmatrix}
A_K^{\mathrm{T}}P + PA_K + R_1 & PA_d & PB_d & PB_1 & C_K^{\mathrm{T}} & K^{\mathrm{T}} \\
* & -\tilde{R}_1 & 0 & 0 & C_d^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & * & -\tilde{R}_2 & 0 & D_d^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & * & * & * & -I & 0 \\
* & * & * & * & * & -R_2^{-1}
\end{bmatrix} < 0
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{bmatrix}
A_K^{\mathrm{T}}P + PA_K & PA_d & PB_d & PB_1 & C_K^{\mathrm{T}} & K^{\mathrm{T}} & I \\
* & -\tilde{R}_1 & 0 & 0 & C_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & -\tilde{R}_2 & 0 & D_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & D_{11}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -R_2^{-1} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -R_1^{-1}
\end{bmatrix} < 0
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{bmatrix}
A_K^{\mathrm{T}}P + PA_K + PA_d\tilde{R}_1^{-1}A_d^{\mathrm{T}}P & PB_d & PB_1 & C_K^{\mathrm{T}} + PA_d\tilde{R}_1^{-1}C_d^{\mathrm{T}} & K^{\mathrm{T}} & I \\
* & -\tilde{R}_2 & 0 & D_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & -\gamma^2 I & D_{11}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & * & -I + C_d\tilde{R}_1^{-1}C_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -R_2^{-1} & 0 \\
* & * & * & * & * & -R_1^{-1}
\end{bmatrix} < 0
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{bmatrix}
A_K^{\mathrm{T}}P + PA_K + PA_d\tilde{R}_1^{-1}A_d^{\mathrm{T}}P + PB_d\tilde{R}_2^{-1}B_d^{\mathrm{T}}P & PB_1 & C_K^{\mathrm{T}} + PA_d\tilde{R}_1^{-1}C_d^{\mathrm{T}} + PB_d\tilde{R}_2^{-1}D_d^{\mathrm{T}} & K^{\mathrm{T}} & I \\
* & -\gamma^2 I & D_{11}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & -I + C_d\tilde{R}_1^{-1}C_d^{\mathrm{T}} + D_d\tilde{R}_2^{-1}D_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & * & -R_2^{-1} & 0 \\
* & * & * & * & -R_1^{-1}
\end{bmatrix} < 0
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{bmatrix}
P^{-1}A_K^{\mathrm{T}} + A_KP^{-1} + A_d\tilde{R}_1^{-1}A_d^{\mathrm{T}} + B_d\tilde{R}_2^{-1}B_d^{\mathrm{T}} & B_1 & P^{-1}C_K^{\mathrm{T}} + A_d\tilde{R}_1^{-1}C_d^{\mathrm{T}} + B_d\tilde{R}_2^{-1}D_d^{\mathrm{T}} & P^{-1}K^{\mathrm{T}} & P^{-1} \\
* & -\gamma^2 I & D_{11}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & -I + C_d\tilde{R}_1^{-1}C_d^{\mathrm{T}} + D_d\tilde{R}_2^{-1}D_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & * & -R_2^{-1} & 0 \\
* & * & * & * & -R_1^{-1}
\end{bmatrix} < 0
\tag{5.5.14}
$$

其中 * 代表对称项。利用如下一些变量变换：$M = KP^{-1}$、$Q = P^{-1}$和 $S_i = R_i^{-1}, i = 1,2$，不等式(5.5.14)可变换为(5.5.12)。

证毕

不等式(5.5.12)关于变量 Q、M、S_1 和 S_2 是线性的。因此，求解式(5.5.12)的 LMI 之后，通过 $M = KP^{-1}$可求得状态反馈增益阵 K。

【例 5.5.1】 考虑广义时滞系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} x(t - d_1(t)) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t - d_2(t))$$

$$z(t) = [1 \quad 1] x(t) + [0.1 \quad 0.1] x(t - d_1(t)) + 0.1 w(t) + u(t) + 0.1 u(t - d_2(t))$$

$$\gamma = 1, d_1(t) = 2 + 0.2\cos t, d_2(t) = 5 + 0.2\sin 3t$$

通过求解式(5.5.12)和式(5.5.13)，得

$$P = \begin{bmatrix} 25.8838 & -8.7399 \\ -8.7399 & 4.2486 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 0.2676 & -0.0082 \\ -0.0082 & 0.2200 \end{bmatrix}$$

$$M = [-1.1255 \quad -1.4670] \quad R_2 = 0.2177$$

因此，状态反馈增益阵为

$$K = [-16.3114 \quad 3.6044]$$

所得控制器保证了具有时变时滞的闭环系统的稳定性和满足 H_∞ 范数界 $\gamma = 1$。

5.6 时滞依赖型鲁棒 H_∞ 控制

前面几节得到的时滞系统的 H_∞ 控制器或者不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制器，均不依赖于系统时滞的大小。也就是说，所得如果对任意大的时滞都成立。这样当系统时滞较小时，所得结果就有一定的保守性。本节我们利用 LMI 方法，讨论不确定时滞系统时滞依赖型的鲁棒镇定控制器设计问题和时滞依赖型的鲁棒 H_∞ 控制器设计问题。上述问题是近年来时滞系统研究的一个热门课题，许多问题尚有待研究。

考虑不确定线性时滞系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (A_d + \Delta A_d(t))x(t-d) + B_w w(t) + (B + \Delta B(t))u(t) \tag{5.6.1a}$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{5.6.1b}$$

$$x(t) = \phi(t), \forall t \in [-d, 0] \tag{5.6.1c}$$

各变量及矩阵的说明同前。假定允许的不确定性矩阵具有如下形式

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t)] = LF(t)[E_a \quad E_b], \Delta A_d(t) = L_d F_d(t) E_d \tag{5.6.2}$$

其中 L、L_d、E_a，E_b 和 E_d 为已知实常阵，未知实时变矩阵 $F(t)$、$F_d(t)$满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I, F_d^{\mathrm{T}}(t)F_d(t) \leqslant I, \forall t \tag{5.6.3}$$

下面的定义给出了依赖于系统时滞的鲁棒镇定问题和鲁棒 H_∞ 控制问题的概念。

【问题 5.6.1】(鲁棒镇定) 给定标量 $\bar{d} > 0$，设计一状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) \tag{5.6.4}$$

使得闭环系统(5.6.1a)和(5.6.4)，对任意满足 $0 \leqslant d \leqslant \bar{d}$ 的常时滞是鲁棒稳定的。此时，称系统(5.6.1a)是鲁棒可镇定的。

【问题 5.6.2】(鲁棒 H_∞ 控制) 给定标量 $\bar{d} > 0$ 和 $\gamma > 0$，设计一状态反馈控制律(5.6.4)，

使得对任意满足 $0\leqslant d\leqslant \bar{d}$ 的常时滞 d，如下条件成立：

(1) 闭环系统(5.6.1a)和(5.6.4)是鲁棒稳定的。

(2) 系统(5.6.1)具有鲁棒 H_∞ 性能。

我们将利用 LMI 技术求解上述的两个问题。为此，需要如下的一些矩阵不等式[75]。

【引理 5.6.1】 设 A、L、E 和 F 为具有适当维数的实矩阵，其中 F 满足 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$，则有：

(1) 对任意标量 $\varepsilon>0$

$$LFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}\leqslant \varepsilon^{-1}LL^{\mathrm{T}}+\varepsilon E^{\mathrm{T}}E$$

(2) 对满足 $\varepsilon I-EPE^{\mathrm{T}}>0$ 的任意矩阵 $P>0$ 和标量 $\varepsilon>0$

$$(A+LFE)P(A+LFE)^{\mathrm{T}}\leqslant APA^{\mathrm{T}}+APE^{\mathrm{T}}(\varepsilon I-EPE^{\mathrm{T}})^{-1}EPA^{\mathrm{T}}+\varepsilon LL^{\mathrm{T}}$$

(3) 对满足 $P-\varepsilon LL^{\mathrm{T}}>0$ 的任意矩阵 $P>0$ 和标量 $\varepsilon>0$

$$(A+LFE)^{\mathrm{T}}P^{-1}(A+LFE)\leqslant A^{\mathrm{T}}(P-\varepsilon LL^{\mathrm{T}})^{-1}A+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E$$

5.6.1 鲁棒镇定

【定理 5.6.1】 令 $u(t)=0, w(t)=0$，考虑系统(5.6.1a)和(5.6.1c)。给定标量 $\bar{d}>0$，该系统对任意满足 $0\leqslant d\leqslant \bar{d}$ 的常时滞 d 是鲁棒稳定的，如果存在正定对称阵 X、X_1 和 X_2 以及正数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_5$ 满足如下 LMI

$$\begin{bmatrix} M(X_1,X_1,X_2) & XE^{\mathrm{T}} & A_d(X_1+X_2)E_d^{\mathrm{T}} & \bar{d}XN^{\mathrm{T}} \\ EX & -J_1 & 0 & 0 \\ E_d(X_1+X_2)A_d^{\mathrm{T}} & 0 & -J_2 & 0 \\ \bar{d}NX & 0 & 0 & -J_3 \end{bmatrix}<0 \tag{5.6.5}$$

其中

$$M(X,X_1,X_2)=X(A+A_d)^{\mathrm{T}}+(A+A_d)X+A_d(X_1+X_2)A_d^{\mathrm{T}}+\hat{L}J_1\hat{L}^{\mathrm{T}}+\alpha_3L_dL_d^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{L}=[L\quad L_d],E^{\mathrm{T}}=[E_a^{\mathrm{T}}\quad E_d^{\mathrm{T}}],N^{\mathrm{T}}=[A^{\mathrm{T}}\quad E_a^{\mathrm{T}}\quad A_d^{\mathrm{T}}\quad E_d^{\mathrm{T}}]$$

$$J_1=\mathrm{diag}\{\alpha_1I,\alpha_2I\},J_2=\alpha_3I-E_d(X_1+X_2)E_d^{\mathrm{T}},J_3=$$
$$\mathrm{diag}\{X_1-\alpha_4LL^{\mathrm{T}},\alpha_4I,X_2-\alpha_5L_dL_d^{\mathrm{T}},\alpha_5I\}$$

【证明】 令 $x(t)$ 为自由系统($u=0,w=0$)(5.6.1a)和(5.6.1c)的解。则对 $t\geqslant d$，我们有

$$x(t-d)=x(t)-\int_{-d}^{0}\dot{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta=x(t)-\int_{-d}^{0}[\overline{A}(t+\theta)x(t+\theta)+$$
$$\overline{A}_d(t+\theta)x(t-d+\theta)]\mathrm{d}\theta$$

其中

$$\overline{A}(t)=A+LF(t)E_a,\overline{A}_d(t)=A_d+L_dF_d(t)E_d \tag{5.6.6}$$

将 $x(t-d)$ 代入方程(5.6.1a)，有

$$\dot{x}(t)=[\overline{A}(t)+\overline{A}_d(t)]x(t)-\overline{A}_d(t)\int_{-d}^{0}[\overline{A}(t+\theta)x(t+\theta)+\overline{A}_d(t+\theta)x(t-d+\theta)]\mathrm{d}\theta$$

根据上面的讨论，我们考虑如下不确定时滞系统

$$\dot{\zeta}(t)=[\overline{A}(t)+\overline{A}_d(t)]\zeta(t)-\overline{A}_d(t)\int_{-d}^{0}[\overline{A}(t+\theta)\zeta(t+\theta)]+$$
$$\overline{A}_d(t+\theta)\zeta(t-d+\theta)]\mathrm{d}\theta \tag{5.6.7a}$$

$$\zeta(t)=\psi(t),\forall t\in[-2d,0] \tag{5.6.7b}$$

其中 $\psi(\cdot)$为初始条件，d 为系统(5.6.1)的时滞。注意方程(5.6.7a)需要区间$[-2d,0]$上的初始条件。

注意到自由系统(5.6.1a)和(5.6.1c)是系统(5.6.7a)和(5.6.7b)的一个特例，这样自由系统(5.6.1a)和(5.6.1c)的解也是系统(5.6.7a)和(5.6.7b)的解。详细的讨论可参见文献[84]的156页。因此，系统(5.6.7a)和(5.6.7b)的全局一致渐近稳定性将保证系统(5.6.1a)和(5.6.1c)的全局一致渐近稳定性。为了判断系统(5.6.1a)和(5.6.1c)的稳定性，我们只需研究系统(5.6.7a)和(5.6.7b)的稳定性。

对于系统(5.6.7a)和(5.6.7b)，定义如下 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{\zeta},t)=\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}(t)+W(\boldsymbol{\zeta},t) \tag{5.6.8}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是正定对称阵，而

$$\begin{aligned}W(\boldsymbol{\zeta},t)=&\int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(s)\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\zeta}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\&\int_{-d}^{0}\int_{t+\theta-d}^{t}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(s)\overline{\boldsymbol{A}}_d^{\mathrm{T}}(s+d)\boldsymbol{P}_2^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_d(s+d)\boldsymbol{\zeta}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{5.6.9}$$

其中 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 为待定正定对称阵。显然，存在正数 β_1 和 β_2，使得

$$\beta_1\|\boldsymbol{\zeta}(t)\|^2\leqslant V(\boldsymbol{\zeta},t)\leqslant\beta_2\sup_{\theta\in[-2d,0]}\|\boldsymbol{\zeta}(t+\theta)\|^2$$

$V(\boldsymbol{\zeta},t)$沿系统(5.6.7a)和(5.6.7b)的解轨迹的导数为

$$\begin{aligned}\dot V(\boldsymbol{\zeta},t)=&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\{[\overline{\boldsymbol{A}}(t)+\overline{\boldsymbol{A}}_d(t)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}[\overline{\boldsymbol{A}}(t)+\overline{\boldsymbol{A}}_d(t)]\}\boldsymbol{\zeta}(t)+\\&\eta_1(\boldsymbol{\zeta},t)+\eta_2(\boldsymbol{\zeta},t)+\dot W(\boldsymbol{\zeta},t)\end{aligned}$$

其中

$$\eta_1(\boldsymbol{\zeta},t)=-2\int_{-d}^{0}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}_d(t)\overline{\boldsymbol{A}}(t+\theta)\boldsymbol{\zeta}(t+\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\eta_2(\boldsymbol{\zeta},t)=-2\int_{-d}^{0}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}_d(t)\overline{\boldsymbol{A}}_d(t+\theta)\boldsymbol{\zeta}(t-d+\theta)\mathrm{d}\theta$$

利用不等式

$$-2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\leqslant\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}^{-1}\boldsymbol{v}$$

其中 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 为具有相同维数的向量，$\boldsymbol{\theta}>\boldsymbol{0}$ 为具有相应维数的矩阵。对任意矩阵 $\boldsymbol{P}_1>\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{P}_2>\boldsymbol{0}$，我们有

$$\begin{aligned}\eta_1(\boldsymbol{\zeta},t)\leqslant&d\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}_d(t)\boldsymbol{P}_1\overline{\boldsymbol{A}}_d^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}(t)+\int_{-d}^{0}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t+\theta)\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}(t+\\&\theta)\boldsymbol{P}_1^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}(t+\theta)\boldsymbol{\zeta}(t+\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_2(\boldsymbol{\zeta},t)\leqslant&d\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}_d(t)\boldsymbol{P}_2\overline{\boldsymbol{A}}_d^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}(t)+\int_{-d}^{0}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t-d+\theta)\overline{\boldsymbol{A}}_d^{\mathrm{T}}(t+\\&\theta)\boldsymbol{P}_2^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_d(t+\theta)\boldsymbol{\zeta}(t-d+\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\dot V(\boldsymbol{\zeta},t)\leqslant&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\{[\overline{\boldsymbol{A}}(t)+\overline{\boldsymbol{A}}_d(t)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}[\overline{\boldsymbol{A}}(t)+\overline{\boldsymbol{A}}_d(t)]+d\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}_d(t)(\boldsymbol{P}_1+\\&\boldsymbol{P}_2)\overline{\boldsymbol{A}}_d^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}+d\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}(t)+d\overline{\boldsymbol{A}}_d^{\mathrm{T}}(t+d)\boldsymbol{P}_2^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_d(t+d)\}\boldsymbol{\zeta}(t)\end{aligned} \tag{5.6.10}$$

对式(5.6.10)的右端，应用引理5.6.1，我们有

$$\dot V(\boldsymbol{\zeta},t)\leqslant\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_d)+\boldsymbol{P}(\varepsilon_1\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2\boldsymbol{L}_d\boldsymbol{L}_d^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}+\varepsilon_1^{-1}\boldsymbol{E}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_a+\varepsilon_2^{-1}\boldsymbol{E}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_d+$$

$$dP[A_d(P_1+P_2)A_d^{\mathrm T}+\varepsilon_3 L_dL_d^{\mathrm T}+A_d(P_1+P_2)E_d^{\mathrm T}(\varepsilon_3 I-E_d(P_1+P_2)E_d^{\mathrm T})^{-1}E_d(P_1+P_2)A_d^{\mathrm T}]P+d[A^{\mathrm T}(P_1-\varepsilon_4 LL^{\mathrm T})^{-1}A+\varepsilon_4^{-1}E_a^{\mathrm T}E_a+A_d^{\mathrm T}(P_2-\varepsilon_5 L_dL_d^{\mathrm T})^{-1}A_d+\varepsilon_5^{-1}E_d^{\mathrm T}E_d]\}\zeta(t) \tag{5.6.11}$$

其中正数 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_5$ 满足 $\varepsilon_3 I-E_d(P_1+P_2)E_d^{\mathrm T}>0, P_1-\varepsilon_4 LL^{\mathrm T}>0$ 和 $P_2-\varepsilon_5 L_dL_d^{\mathrm T}>0$。

引进矩阵函数

$$\begin{aligned}S(Q,Q_1,Q_2,\alpha,\sigma)=&\,Q(A+A_d)^{\mathrm T}+(A+A_d)Q+\alpha_1 LL^{\mathrm T}+\alpha_2 L_dL_d^{\mathrm T}+A_d(Q_1+Q_2)A_d^{\mathrm T}+\\&\alpha_3 L_dL_d^{\mathrm T}+Q(\alpha_1^{-1}E_a^{\mathrm T}E_a+\alpha_2^{-1}E_d^{\mathrm T}E_d)Q+A_d(Q_1+Q_2)E_d^{\mathrm T}(\alpha_3 I-E_d(Q_1\\&+Q_2)E_d^{\mathrm T}]^{-1}E_d(Q_1+Q_2)A_d^{\mathrm T}+\sigma^2 Q[A^{\mathrm T}(Q_1-\alpha_4 LL^{\mathrm T})^{-1}A+\alpha_4^{-1}E_a^{\mathrm T}E_a\\&+A_d^{\mathrm T}(Q_2-\alpha_5 L_dL_d^{\mathrm T})^{-1}A_d+\alpha_5^{-1}E_d^{\mathrm T}E_d)Q\end{aligned}$$

其中 Q、Q_1 和 Q_2 为 $n\times n$ 维实对称矩阵，$\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_5$ 为满足 $\alpha_3 I-E_d(Q_1+Q_2)E_d^{\mathrm T}>0$, $Q_1-\alpha_4 LL^{\mathrm T}>0$ 和 $Q_2-\alpha_5 L_dL_d^{\mathrm T}>0$ 的正数，而 α 代表向量$[\alpha_1,\cdots,\alpha_5]^{\mathrm T}$。于是，我们可将不等式(5.6.11)改写为

$$\dot V(\zeta,t)\leqslant \zeta^{\mathrm T}(t)PS(X,dP_1,dP_2,d\varepsilon,d)P\zeta(t)$$

这里 $X=P^{-1}$，ε 代表向量$[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_5]^{\mathrm T}$。注意 $S(X,dP_1,dP_2,d\varepsilon,d)$关于 d 是单调增加的(在半正定意义下)。

最后，应用 Schur 补引理，我们得到不等式(5.6.5)等价于 $S(X,\bar dP_1,\bar dP_2,d\varepsilon,\bar d)<0$。

证毕

定理 5.6.1 给出了不确定时滞系统的一个时滞依赖型的鲁棒稳定性判据。利用该定理，我们可求解问题 5.6.1。

【定理 5.6.2】 令 $w(t)=0$，考虑系统(5.6.1a)和(5.6.1c)。给定正数 $\bar d>0$，该系统对满足 $0\leqslant d\leqslant \bar d$ 的任意常时滞 d 是鲁棒可镇定的，如果存在正定对称阵 X、X_1 和 X_2，矩阵 Y 和正数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_5$ 满足如下 LMI

$$\begin{bmatrix}M_c(X,Y,X_1,X_2) & E_c^{\mathrm T}(X,Y) & A_d(X_1+X_2)E_d^{\mathrm T} & \bar dN_c^{\mathrm T}(X,Y)\\ E_c(X,Y) & -J_1 & 0 & 0\\ E_d(X_1+X_2)A_d^{\mathrm T} & 0 & -J_2 & 0\\ \bar dN_c(X,Y) & 0 & 0 & -J_3\end{bmatrix}<0 \tag{5.6.12}$$

其中 J_1、J_2 和 J_3 同定理 5.6.1，而

$$M_c(X,Y,X_1,X_2)=X(A+A_d)^{\mathrm T}+(A+A_d)X+Y^{\mathrm T}B^{\mathrm T}+BY+A_d(X_1+X_2)A_d^{\mathrm T}-\hat LJ_1\hat L^{\mathrm T}+\alpha_3 L_dL_d^{\mathrm T}$$

$$E_c^{\mathrm T}(X,Y)=[XE_a^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}E_b^{\mathrm T}\quad XE_d^{\mathrm T}]$$

$$N_c^{\mathrm T}(X,Y)=[XA^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}B^{\mathrm T}\quad XE_a^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}E_b^{\mathrm T}\quad XA_d^{\mathrm T}\quad XE_d^{\mathrm T}]$$

进而，镇定控制律由 $u(t)=YX^{-1}x(t)$给定。

【证明】 将无记忆状态反馈控制律 $u(t)=Kx(t)$，代入系统(5.6.1a)和(5.6.1c)，得闭环系统

$$\dot x(t)=[A_c+LF(t)E_c]x(t)+[A_d+L_dF_d(t)E_d]x(t-d) \tag{5.6.13a}$$

$$x(t)=\phi(t),\ \forall t\in[-d,0] \tag{5.6.13b}$$

其中 $A_c=A+BK$, $E_c=E_a+E_bK$。因此，将定理 5.6.1 应用于闭环系统(5.6.13)并置 $Y=KX$

立即得定理的结论。 **证毕**

定理5.6.2给出了不确定时滞系统的一个时滞依赖型的鲁棒可镇定判据。由于定理5.6.1和定理5.6.2给出的两个判据均以LMI形式给出，其最大的优点在于可对参数进行优化，以得到使系统鲁棒稳定或鲁棒镇定的最大时滞界 $\bar{d}$。例如，定理5.6.2中的时滞界 $\bar{d}$，可通过求解如下关于变量 X、X_1、X_2、Y，$\alpha_1,\cdots,\alpha_5$ 和 $\bar{d}$ 的二次凸优化问题而得到

$$\begin{cases}\text{maximize } \bar{d} \\ \text{s.t.} \quad X>0, X_1>0, X_2>0 \\ \alpha_1>0,\cdots,\alpha_5>0, \bar{d}>0 \text{ 和不等式(5.6.12)}\end{cases}$$

上述二次凸优化问题可通过Matlab中LMI工具箱求解，详细讨论见文献[61]。

与之相比，文献[85]、[86]、[76]中，利用Lyapunov方程或者Riccati方程的解的方法，所得到的时滞依赖型的鲁棒稳定和鲁棒镇定判据依赖于参数或正定对称阵的调整，以获得尽可能大的时滞界 $\bar{d}$。而这种参数或矩阵的调整没有统一的规律可寻，这就使得最大时滞界 $\bar{d}$ 的求解变得很困难。所以本节用LMI方法得到的时滞依赖型的鲁棒稳定或鲁棒镇定判据具有较小的保守性。

当系统(5.6.11)中不存在不确定性，我们有如下结果。

【推论5.6.1】 考虑系统(5.6.1)。令 $w(t)=0$，$\Delta A(t)=0$，$\Delta A_d(t)=0$ 和 $\Delta B(t)=0$，则给定正数 $\bar{d}>0$，此系统对任意满足 $0\leqslant d\leqslant \bar{d}$ 的常时滞 d 是可镇定的，如果存在正定对称阵 X、X_1 和 X_2 以及矩阵 Y，满足如下LMI

$$\begin{bmatrix} Q(X,Y,X_1,X_2) & \bar{d}(XA^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}) & \bar{d}XA_d^{\mathrm{T}} \\ \bar{d}(AX+BY) & -X_1 & 0 \\ \bar{d}A_dX & 0 & -X_2 \end{bmatrix}<0 \tag{5.6.14}$$

其中

$$Q(X,Y,X_1,Y_2)=X(A+A_d)^{\mathrm{T}}+(A+A_d)X+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BY+A_d(X_1+X_2)A_d^{\mathrm{T}}$$

进而，镇定控制律由 $u(t)=YX^{-1}x(t)$ 给定。

5.6.2 鲁棒 H_∞ 控制

首先，考虑自由系统($u=0$)(5.6.1)的鲁棒 H_∞ 性能分析问题，有如下定理。

【定理5.6.3】 考虑自由系统($u=0$)(5.6.1)。给定正数 $\gamma>0$ 和 $\bar{d}>0$，该系统对任意满足 $0\leqslant d\leqslant \bar{d}$ 的常时滞 d 具有鲁棒 H_∞ 性能，如果存在正定对称矩阵 X、X_1、X_2 和 X_3 以及正数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_6$，满足如下LMI

$$\begin{bmatrix} M(X,X_1,X_2) & XE^{\mathrm{T}} & A_d(X_1+X_2)E_d^{\mathrm{T}} & \bar{d}XN^{\mathrm{T}} & G(X) \\ EX & -J_1 & 0 & 0 & 0 \\ E_d(X_1+X_2)A_d^{\mathrm{T}} & 0 & -J_2 & 0 & 0 \\ \bar{d}NX & 0 & 0 & -J_3 & 0 \\ G^{\mathrm{T}}(X) & 0 & 0 & 0 & -J_4 \end{bmatrix}<0 \tag{5.6.15}$$

其中 $M(X,X_1,X_2)$，E、N、J_1、J_2 和 J_3 同定理5.6.1，而

$$G(X)=[\bar{d}A_d \quad \bar{d}L_d \quad XC^{\mathrm{T}} \quad B_w]$$

$$J_4 = \mathrm{diag}[X_3 - \alpha_6 E_d^{\mathrm{T}} E_d, \alpha_6 I, I, \gamma^2 I - B_w^{\mathrm{T}} X_3 B_w]$$

【证明】 由于不等式(5.6.15)隐含不等式(5.6.5),根据定理5.6.1,自由系统(5.6.1)对任意满足 $0 \leqslant d \leqslant \bar{d}$ 的常时滞 d 是鲁棒稳定的。

为了建立系统(5.6.1)的鲁棒 H_∞ 性能,假设方程(5.6.1a)的初始条件为零,并定义Lyapunov函数

$$V_1(x,t) = x^{\mathrm{T}} P x + W_1(x,t) \tag{5.6.16}$$

其中 $P > 0$, $W_1(x,t)$ 由下式给定

$$W_1(x,t) = \int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t} [x^{\mathrm{T}}(s)\bar{A}^{\mathrm{T}}(s)P_1^{-1}\bar{A}(s)x(s) + w^{\mathrm{T}}(s)B_w^{\mathrm{T}}P_3B_w w(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + \int_{-d}^{0}\int_{t+\theta-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)\bar{A}_d^{\mathrm{T}}(s+d)P_2^{-1}\bar{A}_d(s+d)X(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \tag{5.6.17}$$

这里 P_1、P_2 和 P_3 为待定的正定对称阵。

注意到,在零初始条件下,方程(5.6.1a)的状态轨迹满足

$$\dot{x}(t) = [\bar{A}(t) + \bar{A}_d(t)]x(t) - \bar{A}_d(t)\int_{-d}^{0}[\bar{A}(t+\theta)x(t+\theta) + \bar{A}_d(t+\theta)x(t-d+\theta) + B_w w(t+\theta)]\mathrm{d}\theta, x(t) = 0, \forall t \leqslant 0 \tag{5.6.18}$$

其中 $\bar{A}(t)$ 和 $\bar{A}_d(t)$ 同式(5.6.6)。我们也注意到对任意矩阵 $P_3 > 0$

$$-2\int_{-d}^{0} x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}_d(t)B_w w(t+\theta)\mathrm{d}\theta \leqslant \int_{-d}^{0} w^{\mathrm{T}}(t+\theta)B_w^{\mathrm{T}}P_3B_w w(t+\theta)\mathrm{d}\theta + dx^{\mathrm{T}}(t)P\bar{A}_d(t)P_3^{-1}\bar{A}_d^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$$

应用与定理5.6.1相同的证明方法,容易算得 $V_1(x,t)$ 沿方程(5.6.18)的解轨迹的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x,t) \leqslant\ & x^{\mathrm{T}}(t)\{[\bar{A}(t) + \bar{A}_d(t)]^{\mathrm{T}}P + P[\bar{A}(t) + \bar{A}_d(t)] + \\ & dP\bar{A}_d(t)(P_1 + P_2)\bar{A}_d^{\mathrm{T}}(t)P + dP\bar{A}_d(t)P_3^{-1}\bar{A}_d^{\mathrm{T}}(t)P + \\ & d\bar{A}^{\mathrm{T}}(t)P_1^{-1}\bar{A}(t) + d\bar{A}_d^{\mathrm{T}}(t+d)P_2^{-1}\bar{A}_d(t+d)\}x(t) + \\ & d\,w^{\mathrm{T}}(t)B_w^{\mathrm{T}}P_3B_w w(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PB_w w(t) \leqslant \\ & x^{\mathrm{T}}(t)R(d)x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PB_w w(t) + dw^{\mathrm{T}}(t)B_w^{\mathrm{T}}P_3B_w w(t)\end{aligned} \tag{5.6.19}$$

其中

$$\begin{aligned}R(d) =\ & (A + A_d)^{\mathrm{T}}P + P(A + A_d) + P(\varepsilon_1 LL^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2 L_d L_d^{\mathrm{T}})P + \varepsilon_1^{-1}E_a^{\mathrm{T}}E_a + \varepsilon_2^{-1}E_d^{\mathrm{T}}E_d + \\ & dP\{A_d(P_1 + P_2)A_d^{\mathrm{T}} + \varepsilon_3 L_d L_d^{\mathrm{T}} + A_d(P_1 + P_2)E_d^{\mathrm{T}}[\varepsilon_3 I - E_d(P_1 + P_2)E_d^{\mathrm{T}}]^{-1}E_d(P_1 + \\ & P_2)A_d^{\mathrm{T}}\}P + d[A^{\mathrm{T}}(P_1 - \varepsilon_4 LL^{\mathrm{T}})^{-1}A + \varepsilon_4^{-1}E_a^{\mathrm{T}}E_a + A_d^{\mathrm{T}}(P_2 - \varepsilon_5 L_d L_d^{\mathrm{T}})^{-1}A_d + \\ & \varepsilon_5^{-1}E_d^{\mathrm{T}}E_d] + dP[A_d(P_3 - \varepsilon_6 E_d^{\mathrm{T}}E_d)^{-1}A_d^{\mathrm{T}} + \varepsilon_6^{-1}L_d L_d^{\mathrm{T}}]P\end{aligned} \tag{3.6.20}$$

这里 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_6$ 为满足 $\varepsilon_3 I - E_d(P_1 + P_2)E_d^{\mathrm{T}} > 0$, $P_1 - \varepsilon_4 LL^{\mathrm{T}} > 0$, $P_2 - \varepsilon_5 L_d L_d^{\mathrm{T}} > 0$ 和 $P_3 - \varepsilon_6 E_d^{\mathrm{T}}E_d > 0$ 的任意正数。

考虑到式(5.6.19),并且置 $P = X^{-1}$, $d\,P_i = X_i$, $i = 1, \cdots, 3$, $\varepsilon_1 = \alpha_1$, $\varepsilon_2 = \alpha_2$, $d\varepsilon_i = \alpha_i$, $i = 3, \cdots, 6$,其中 X、X_1、X_2、X_3 和 $\alpha_1, \cdots, \alpha_6$ 满足不等式(5.6.15),我们得到:对任意非零 $w \in L_2[0, \infty)$ 和对任意 $0 \leqslant d \leqslant \bar{d}$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_1(x,t) + z^{\mathrm{T}}z - \gamma^2 w^{\mathrm{T}}w \leqslant \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} R(\bar{d}) + C^{\mathrm{T}}C & PB_w \\ B_w^{\mathrm{T}}P & -Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \tag{5.6.21}$$

其中 $Z = \gamma^2 I - \bar{d} B_w^T P_3 B_w$，而第二个不等式是由式(5.6.15)根据 Schur 补得到的。

注意到由于 $w \in L_2[0,\infty)$，系统(5.6.1a)对于 $0 \leqslant d \leqslant \bar{d}$ 的鲁棒稳定性隐含 $\|z\|_2$ 的有界性和 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$。因此，在零初始条件下，由式(5.6.17)容易得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \Big\{ \int_{-d}^{0} [& x^T(t)\bar{A}^T(t)P_1^{-1}\bar{A}(t)x(t) - x^T(t+\theta)\bar{A}^T(t+\theta) \\
& P_1^{-1}\bar{A}(t+\theta)x(t+\theta)]\mathrm{d}\theta + \int_{-d}^{0}[x^T(t)\bar{A}_d^T(t+d)P_2^{-1}\bar{A}_d(t+d)x(t) - \\
& x^T(t+\theta-d)\bar{A}_d^T(t+\theta)P_2^{-1}\bar{A}_d(t+\theta)x(t+\theta-d)]\mathrm{d}\theta + \\
& \int_{-d}^{0}[w^T(t)B_w^T P_3 B_w w(t) - w(t+\theta)B_w^T P_3 B_w w(t+\theta)\mathrm{d}\theta\Big\}\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
\tag{5.6.22}
$$

最后，考虑到式(5.6.16)、(5.6.21)和式(5.6.22)，我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\{z^T z - \gamma^2 w^T w\}\mathrm{d}t &= \int_0^{\infty}[z^T z - \gamma^2 w^T w + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^T P x + w_1)]\mathrm{d}t = \\
&\int_0^{\infty}[\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} + z^T z - \gamma^2 w^T w)\mathrm{d}t < 0
\end{aligned}
$$

对任意非零 $w \in L_2[0,\infty)$ 和任意满足 $0 \leqslant d \leqslant \bar{d}$ 的 d，以及所有允许的不确定性成立。 **证毕**

现在，利用定理 5.6.3，我们可求解系统(5.6.1)的鲁棒 H_∞ 控制问题，即求解问题 5.6.2。

【定理 5.6.4】 问题 5.6.2 有解，如果存在正定对称阵 X、X_1、X_2 和 X_3，矩阵 Y 以及正数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_6$ 满足如下 LMI

$$
\begin{bmatrix}
M_c(X,Y,X_1,X_2) & E_c^T(X,Y) & A_d(X_1+X_2)E_d^T & \bar{d}N_c^T(X,Y) & G_c(X,Y) \\
E_c(X,Y) & -J_1 & 0 & 0 & 0 \\
E_d(X_1+X_2)A_d^T & 0 & -J_2 & 0 & 0 \\
\bar{d}N_c(X,Y) & 0 & 0 & -J_3 & 0 \\
G_c^T(X,Y) & 0 & 0 & 0 & -J_4
\end{bmatrix} < 0
\tag{5.6.23}
$$

其中 J_1、J_2、J_3 同定理 5.6.1，$M_c(X,Y,X_1,X_2)$，$E_c(X,Y)$和 $N_c(X,Y)$同定理 5.6.2，J_4 同定理 5.6.3，而

$$
G_c(X,Y) = [\bar{d}A_d \quad \bar{d}L_d(CX+DY)^T \quad B_w]
$$

进而，镇定控制律由 $u(t) = YX^{-1}x(t)$给定。

【证明】 定理的证明类似于定理 5.6.2，只不过现在是应用定理 5.6.3 而不是定理 5.6.1。

证毕

定理 5.6.3 和定理 5.6.4 分别给出了不确定线性状态时滞系统(5.6.1)的时滞依赖型鲁棒 H_∞ 性能分析和鲁棒 H_∞ 性能设计的方法。应用这两个定理，可求解时滞 d 的最大值 $\bar{d}$(当 γ 给定)，或求解性能指标 γ 的最小值(当 $\bar{d}$ 给定)，而无需做任何参数的调整。例如，根据定理 5.6.4，给定 $\bar{d}$，γ 最小值的求取可通过求解如下的凸优化问题而得到

$$
\begin{cases}
\text{minimize } \gamma^2 \\
\text{s.t.} \quad X > 0, X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0 \\
\alpha_1 > 0, \cdots, \alpha_6 > 0 \text{ 和不等式(5.6.24)}
\end{cases}
$$

类似地，根据定理5.6.4，给定 γ，读者不难写出计算 $\overline{d}$ 以使系统满足鲁棒 H_∞ 性能的凸优化算法程序。

当系统(5.6.1)没有不确定性时，我们可得如下推论。

【推论5.6.2】 考虑系统(5.6.1)，令 $\Delta \boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{0}$，$\Delta \boldsymbol{A}_d(t)=\boldsymbol{0}$ 和 $\Delta \boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{0}$，则问题5.6.2可解，如果存在正定对称阵 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$ 和 $\boldsymbol{X}_3$ 以及矩阵 $\boldsymbol{Y}$，满足如下LMI

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2) & \overline{d}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) & \overline{d}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \\ \overline{d}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}) & -\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \overline{d}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{X} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{W} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.6.24}$$

其中 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)$ 同推论5.6.1，而

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=[\overline{d}\boldsymbol{A}_d \quad (\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{B}_w]$$
$$\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{I},\gamma^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{B}_w\}$$

进而，镇定控制律由 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ 给定。

【例5.6.1】 考虑线性不确定时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}(t)]\boldsymbol{x}(t)+[\boldsymbol{A}_d+\Delta\boldsymbol{A}_d(t)]\boldsymbol{x}(t-d)+\boldsymbol{B}_w w(t)+\boldsymbol{B}u(t)$$
$$z(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_d=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_w=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=[0 \quad 1]$$

不确定矩阵 $\Delta\boldsymbol{A}$，$\Delta\boldsymbol{A}_d$ 满足 $\|\Delta\boldsymbol{A}(t)\|\leqslant 0.2$ 和 $\|\Delta\boldsymbol{A}_d(t)\|\leqslant 0.2$，$\forall t$。

上述系统具有式(5.6.1)的形式，其中

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_d=\mathrm{diag}\{0.2 \quad 0.2\},\boldsymbol{E}_a=\boldsymbol{E}_d=\mathrm{diag}\{1 \quad 1\} \text{和} \boldsymbol{E}_b=\boldsymbol{0}$$

应用定理5.6.4鲁棒 H_∞ 控制的结果，当 d 满足 $0\leqslant d\leqslant 0.3$ 时，γ 的最小值为 $\gamma=1.95$。而当允许的最大时滞减小为0.2时，γ 的最小值减小为0.66。

该例中，与其它各种方法的比较可参阅文献[75]。

5.7 基于LMI的输出反馈解

我们在4.5.3小节给出了 H_∞ 标准控制问题的输出反馈动态控制器设计的LMI方法。本节，我们将该方法应用于时滞系统的输出反馈动态控制器的设计。

考虑广义状态时滞系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+A_d x(t-d(t))-B_1 w(t)+B_2 u(t) \tag{5.7.1a}$$
$$z(t)=C_1 x(t)+D_{11}w(t)+D_{12}u(t) \tag{5.7.1b}$$
$$y(t)=C_2 x(t)+D_{21}w(t) \tag{5.7.1c}$$
$$x(t)=\boldsymbol{0},t\leqslant 0 \tag{5.7.1d}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$ 是状态，$w\in\mathbf{R}^r$ 是平方可积干扰输入，$u\in\mathbf{R}^p$ 是控制，$z\in\mathbf{R}^m$ 是被控输出，$y\in\mathbf{R}^q$ 是量测输出，$d(t)$ 是满足如下条件的时变时滞

$$0\leqslant d(t)<\infty,\dot{d}(t)\leqslant\overline{m}<1 \tag{5.7.2}$$

而 A、A_d、B_1、B_2、C_1、C_2、D_{11}、D_{12}和 D_{21}是具有适当维数的常值矩阵。假定(A,B_2)能稳定，(C_2,A)能检测。我们的任务是设计状态时滞系统(5.7.1)的输出反馈动态 H_∞控制器(参见定义4.5.1)。考虑如下动态输出反馈控制律

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \tag{5.7.3a}$$

$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t) \tag{5.7.3b}$$

其中 $x_c \in \mathbf{R}^k$ 是控制器状态，矩阵 A_c, B_c, C_c 和 D_c 是具有适当维数的常值矩阵。由式(5.7.1)和式(5.7.3)构成的闭环系统为

$$\dot{\zeta}(t) = A_{cl}\zeta(t) + A_{cld}\zeta(t-d(t)) + B_{cl}w(t) \tag{5.7.4a}$$

$$z(t) = C_{cl}\zeta(t) + D_{cl}w(t) \tag{5.7.4b}$$

$$\zeta(t) = 0, t \leqslant 0 \tag{5.7.4c}$$

其中

$$\begin{gathered}\zeta(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t)\end{bmatrix}, A_{cl}=\begin{bmatrix} A+B_2D_cC_2 & B_2C_c \\ B_cC_2 & A_c\end{bmatrix} \\ A_{cld}=\begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, B_{cl}=\begin{bmatrix} B_1+B_2D_cD_{21} \\ B_cD_{21}\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{5.7.5}$$

将控制器(5.7.3)记为

$$C_{cl}=[\,C_1+D_{12}D_cC_2 \quad D_{12}C_c\,], D_{cl}=D_{11}+D_{12}D_cD_{21}$$

$$K = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c\end{bmatrix} \tag{5.7.6}$$

并引进如下记号

$$\begin{gathered}\hat{A}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, \hat{A}_d=\begin{bmatrix} A_d \\ 0\end{bmatrix}, E=[\,I \quad 0\,] \\ \hat{B}_1=\begin{bmatrix} B_1 \\ 0\end{bmatrix}, \hat{B}_2=\begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix}, \hat{C}_1=[\,C_1 \quad 0\,] \\ \hat{C}_2=\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix}, \hat{D}_{12}=[\,D_{12} \quad 0\,], \hat{D}_{21}=\begin{bmatrix} D_{21} \\ 0\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{5.7.7}$$

则闭环系统矩阵 A_{cl}、B_{cl}、C_{cl}和 D_{cl}可表示为

$$\begin{gathered}A_{cl}=\hat{A}+\hat{B}_2K\hat{C}_2, A_{cld}=\hat{A}_dE, B_{cl}=\hat{B}_1+\hat{B}_2K\hat{D}_{21} \\ C_{cl}=\hat{C}_1+\hat{D}_{12}K\hat{C}_2, D_{cl}=D_{11}+\hat{D}_{12}K\hat{D}_{21}\end{gathered} \tag{5.7.8}$$

【引理5.7.1】[74]　考虑满足式(5.7.2)的闭环系统(5.7.4)，并假定 $\bar{\sigma}(D_{cl})<\gamma$。如果存在正定矩阵 P 和 Q，使得

$$\begin{gathered}A_{cl}^{\mathrm{T}}P+PA_{cl}+(1-m)^{-1}P\hat{A}_dQ^{-1}\hat{A}_d^{\mathrm{T}}P+E^{\mathrm{T}}QE+\gamma^{-2}C_{cl}^{\mathrm{T}}C_{cl}+ \\ (\gamma^{-2}D_{cl}^{\mathrm{T}}C_{cl}+B_{cl}^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}(I-\gamma^{-2}D_{cl}^{\mathrm{T}}D_{cl})^{-1}(\gamma^{-2}D_{cl}^{\mathrm{T}}C_{cl}+B_{cl}^{\mathrm{T}}P)<0\end{gathered} \tag{5.7.9}$$

则闭环系统(5.7.4)是渐近稳定的，并且 $\|z(t)\|_2<\gamma\|w(t)\|_2$。

反复应用Schur补引理，式(5.7.9)可转化为如下LMI形式

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^{\mathrm{T}}P+PA_{cl}+E^{\mathrm{T}}QE & PB_{cl} & C_{cl}^{\mathrm{T}} & P\hat{A}_d \\ B_{cl}^{\mathrm{T}}P & -\gamma I & D_{cl}^{\mathrm{T}} & 0 \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I & 0 \\ \hat{A}_d^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -(1-\overline{m})Q \end{bmatrix} \tag{5.7.10}$$

类似于引理 4.5.3 的证明,式(5.7.10)等价于下式

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{BKC} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} < 0 \tag{5.7.11}$$

其中

$$\boldsymbol{B} = [\hat{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \quad 0 \quad \hat{\boldsymbol{D}}_{12}^{\mathrm{T}} \quad 0]^{T}, \boldsymbol{C} = [\hat{\boldsymbol{C}}_2 \quad \hat{\boldsymbol{D}}_{12} \quad 0 \quad 0] \tag{5.7.12}$$

和

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{B}}_1 & \hat{\boldsymbol{C}}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{A}}_d \\ \hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \hat{\boldsymbol{C}}_1 & \boldsymbol{D}_{11} & -\gamma\boldsymbol{I} & 0 \\ \hat{\boldsymbol{A}}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & 0 & -(1-\overline{m})\boldsymbol{Q} \end{bmatrix} \tag{5.7.13}$$

根据定理 4.5.4,不等式(5.7.11)对某 $\boldsymbol{K}$ 是可解的,当且仅当

$$\boldsymbol{B}_{\perp}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{B}_{\perp} < 0 \tag{5.7.14}$$

$$(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\perp}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\perp} < 0 \tag{5.7.15}$$

其中 $\boldsymbol{B}_{\perp}$和$(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})_{\perp}$分别是 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 的直交补矩阵。

类似于定理 4.5.5,由式(5.7.14)和式(5.7.15),可得广义状态时滞系统(5.7.1)的基于 LMI 的 H_∞控制器设计问题的可解性条件。

【定理 5.7.1】[74] 设广义状态时滞系统(5.7.1)满足条件(5.7.2)。令$[\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{W}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和 $[\boldsymbol{W}_3^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{W}_4^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$分别为$[\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{D}_{12}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和$[\boldsymbol{C}_2 \quad \boldsymbol{D}_{21}]^{\mathrm{T}}$ 的直交补矩阵。如果对某 $\boldsymbol{Q} > 0$,存在正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 满足如下三个 LMI

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{W}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{XA}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{AX} & \boldsymbol{XC}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_d & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{X} & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}_{11} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}} & -\gamma\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -(1-\overline{m})\boldsymbol{Q} & 0 \\ \boldsymbol{X} & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{Q}^{-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{W}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.7.16a}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_3 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{W}_4 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{YA} + \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{YB}_1 & \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{YA}_d \\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{11} & -\gamma\boldsymbol{I} & 0 \\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} & 0 & 0 & -(1-\overline{m})\boldsymbol{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_3 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{W}_4 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.7.16b}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.7.16c}$$

则 H_∞控制器设计问题是可解的。

求解(5.7.16)三式的 LMI,得 $\boldsymbol{X} > 0$ 和 $\boldsymbol{Y} > 0$。按式(4.5.55),采用矩阵奇异值分解理论,求得 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$。解式(4.5.56)的线性矩阵方程,得 $\boldsymbol{P} > 0$。最后,求解式(5.7.11)的 LMI,得到动态控制器 $\boldsymbol{K}$。当然,也可按式(4.5.57),求得参数化控制器 $\boldsymbol{K}$。

【例 5.7.1】 考虑系统(5.7.1),其中

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, A_d=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.3 & 0.1\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, C_2=[1 \quad 3], D_{11}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, D_{12}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, D_{21}=1$$

$$d(t)=5+0.5\sin t$$

令 $\gamma=2, \overline{m}=0.5, Q=I_2$,则式(5.7.16)的一对正定解为

$$(X,Y)=\left(\begin{bmatrix}1.812\,1 & 0.150\,0\\ 0.150\,0 & 0.553\,7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3.872\,5 & 0.844\,5\\ 0.844\,5 & 2.168\,5\end{bmatrix}\right)$$

式(4.5.55)的一对解为

$$(M,N)=\left(\begin{bmatrix}-0.985\,8 & -0.168\,2\\ -0.168\,2 & 0.985\,8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6.232\,8 & 0\\ 1.884\,1 & -0.010\,7\end{bmatrix}\right)$$

式(4.5.56)的正定解为

$$P=\begin{bmatrix}3.872\,5 & 0.844\,5 & 6.232\,8 & 0\\ 0.844\,5 & 2.168\,5 & 1.884\,1 & -0.010\,7\\ 6.232\,8 & 1.884\,1 & 11.744\,9 & -0.002\,6\\ 0 & -0.010\,7 & -0.002\,6 & 0.005\,6\end{bmatrix}$$

最后,解式(5.7.11),得 H_∞ 控制器

$$K=\left[\begin{array}{c|c}D_c & C_c\\ \hline B_c & A_c\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}-1.305\,1 & -4.230\,1 & 0.085\,8\\ \hline -0.366\,0 & -2.741\,1 & 0.002\,7\\ 1.207\,9 & 1.524\,7 & -8.410\,8\end{array}\right]$$

5.8 时滞系统的鲁棒可靠 H_∞ 控制

考虑如下参数不确定线性时滞系统

$$\dot{x}(t)=[A+\Delta A(t)]x(t)+[A_1+\Delta A_1(t)]x(t-d(t))+Bu(t)+Dw(t) \tag{5.8.1a}$$

$$z(t)=Ex(t) \tag{5.8.1b}$$

$$x(t)=0, t\in[\overline{d},0] \tag{5.8.1c}$$

其中时变时滞满足 $0\leqslant d(t)\leqslant\overline{d}<\infty$ 且 $\dot{d}\leqslant\overline{m}<1$。$\Delta A(t)$ 和 $\Delta A_1(t)$ 是范数有界时变不确定性,并且具有如下形式

$$[\Delta A(t) \quad \Delta A_1(t)]=GF(t)[H \quad H_1] \tag{5.8.2a}$$

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I \tag{5.8.2b}$$

与4.8节类似,这里我们只讨论系统(5.8.1)在执行器失效下的鲁棒可靠 H_∞ 控制问题,并且,所引用的符号、矩阵的分解等均同4.7节和4.8节。同样,我们将失效的执行器的输出视为一种作用于被控对象上的干扰。总干扰仍表示为 $w_F=[w^{\mathrm{T}} \quad w_u^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。

对上述系统(5.8.1),我们设计如下的状态反馈控制律

$$u(t)=Kx(t) \tag{5.8.3}$$

可靠地镇定系统(5.8.1),同时可靠地抑制外界干扰 w 和由于执行器失效所产生的干扰 w_u。即,设计控制律(5.8.3),满足如下条件:

(1) 闭环系统是渐近稳定的。

(2) 在零初始条件下,对任意 $w_F \in L_2[0,\infty)$,满足

$$\| z \|_2 \leq \gamma \| w_F \|_2$$

如果满足上述条件的控制律(5.8.3)存在,则称系统(5.8.1)在控制律(5.8.3)作用下,是具有 H_∞ 范数界 γ 鲁棒可靠镇定的。

下面的定理给出了系统(5.8.1)具有 H_∞ 范数界 γ 鲁棒可靠镇定的一个充分条件。

【定理 5.8.1】 给定常数 $\gamma > 0$。设存在正数 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$,使得如下 Riccati 方程有正定解 $\boldsymbol{P} > 0$。

$$\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_{\Omega}\boldsymbol{B}_{\Omega}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P} + \delta\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{GG}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P} - \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{PB}_{\bar{\Omega}}\boldsymbol{B}_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} +$$

$$\frac{1}{\delta}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H} + \frac{1}{\delta(1-\overline{m})}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1) + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} + \varepsilon\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0} \tag{5.8.4}$$

取反馈控制律为

$$\boldsymbol{u}(t) = -\frac{1}{2\varepsilon}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}(t) \tag{5.8.5}$$

则,对于任意执行器 $\omega \subseteq \Omega$ 失效,系统(5.8.1)在控制律(5.8.5)作用下是具有 H_∞ 范数界 γ 鲁棒可靠镇定的。

【证明】 首先,我们证明系统(5.8.1)在控制律(5.8.5)作用下是鲁棒可靠镇定的。根据 $\boldsymbol{B}_\omega$ 和 $\boldsymbol{B}_{\bar{\omega}}$ 的定义,不难得到闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \frac{1}{2\varepsilon}\boldsymbol{B}_{\bar{\omega}}\boldsymbol{B}_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{A}_1 + \Delta\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x}(t - d(t)) + (\boldsymbol{D} \quad \boldsymbol{B}_\omega)\boldsymbol{w}_F(t) \tag{5.8.6}$$

对闭环系统(5.8.6),取如下 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}_t) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px} + \frac{1}{\delta(1-\overline{m})}\int_{t-d}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s \tag{5.8.7}$$

则当系统无干扰 $w_F(t)$ 输入时,$V(x_t)$ 沿闭环系统(5.5.6)解轨迹的导数为

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}_t) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} - \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PB}_{\bar{\omega}}\boldsymbol{B}_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px} + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1 + \Delta\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x}(t - d(t)) +$$

$$\frac{1}{\delta(1-\overline{m})}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{x} - \frac{1-\dot{d}}{\delta(1-\overline{m})}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t - d(t))(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{x}(t - d(t)) \tag{5.8.8}$$

利用矩阵不等式(5.1.18)和事实 $\boldsymbol{B}_{\bar{\omega}}\boldsymbol{B}_{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{B}_{\bar{\Omega}}\boldsymbol{B}_{\bar{\Omega}}^{\mathrm{T}}$,不难得到

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}_t) \leq -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qx} \tag{5.8.9}$$

其中 $\boldsymbol{Q} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_{\Omega}\boldsymbol{B}_{\Omega}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P} + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} + \varepsilon\boldsymbol{I} > \boldsymbol{0}$,因此,闭环系统是鲁棒可靠镇定的。

下面证明,在零初始条件下,对于任意的 $\boldsymbol{w}_F \in L_2[0,\infty)$,被控输出 z 满足 $\| z \|_2 \leq \gamma \| \boldsymbol{w}_F \|_2$,为此,引入辅助函数

$$J = \int_0^\infty (\frac{1}{\gamma}z^{\mathrm{T}}z - \gamma w_F^{\mathrm{T}}w_F)\mathrm{d}t$$

则对于任意 $w_F \in L_2[0,\infty)$,有

$$J \leqslant \int_0^{\infty} [\frac{1}{\gamma} z^{\mathrm{T}} z - \gamma w_F^{\mathrm{T}} w_F + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x_t) \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\int_0^{\infty} \{\frac{1}{\gamma} z^{\mathrm{T}} z - \gamma w_F^{\mathrm{T}} w_F - 2x^{\mathrm{T}} P [D \quad B_{\omega}] w_F - x^{\mathrm{T}} Q x\} \mathrm{d}t \leqslant$$

$$-\int_0^{\infty} \varepsilon x^{\mathrm{T}} x \mathrm{d}t - \int_0^{\infty} (\sqrt{\gamma} w_F - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} [D \quad B_{\omega}]^{\mathrm{T}} P x)^{\mathrm{T}} (\sqrt{\gamma} w_F - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} [D \quad B_{\omega}]^{\mathrm{T}} P x) \mathrm{d}t \leqslant 0$$

所以有

$$\| z \|_2^2 \leqslant \gamma^2 \| w_F \|_2^2$$

即

$$\| z \|_2 \leqslant \gamma \| w_F \|_2, \forall w_F \in L_2[0, \infty)$$

因此,系统(5.8.1)在控制律(5.8.5)作用下是具有 H_{∞} 范数界 γ 鲁棒可靠镇定的。 证毕

定理 5.8.1 给出了具有状态滞后的不确定线性系统的鲁棒可靠 H_{∞} 控制器的设计方法。鲁棒可靠 H_{∞} 控制器可通过求解一个特定的 Riccati 方程而得到。关于 Riccati 方程(5.8.4)中参数 δ 的选取原则,可参见文献[81]的引理 1。

5.9 时滞系统的指数稳定 H_{∞} 控制

考虑如下状态时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d) + Bu(t) + B_1 w(t) \tag{5.9.1a}$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{5.9.1b}$$

$$x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-d, 0], (t_0, \phi) \in \mathbf{R}^+ \times C_{n,d}^v \tag{5.9.1c}$$

假设(A_1),$D^{\mathrm{T}}[C \quad D] = [0 \quad I]$。

本节我们讨论状态时滞系统(5.9.1)的无记忆状态反馈指数稳定 H_{∞} 控制问题。具体定义如下。

【定义 5.9.1】 给定 $\gamma > 0$ 和 $\alpha > 0$,设计无记忆状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) \tag{5.9.2}$$

使得:

(1) 闭环系统是 α - 一致渐近稳定的(指数稳定)。

(2) 在零初始条件下,闭环系统对所有非零的 $w \in L_2[0, \infty)$,满足

$$\| z(t) \|_2 < \gamma \| w(t) \|_2 \tag{5.9.3}$$

此时,我们称 γ 是 α - 次优的。

注 1 如果 γ 在 $\alpha = 0$ 时是 α - 次优的,则 γ 就是通常定义下的 H_{∞} 次优的。而且,如果闭环系统是 α - 一致渐近稳定的,则闭环系统在 $\alpha = 0$ 时也是一致渐近稳定的。

将状态反馈控制律(5.9.2)代入式(5.9.1),得闭环系统

$$\dot{x}(t) = A_K x(t) + A_d x(t-d) + B_1 w(t) \tag{5.9.4a}$$

$$z(t) = C_K x(t) \tag{5.9.4b}$$

其中 $A_K = A + BK$, $C_K = C + DK$。

我们有如下定理。

【定理 5.9.1】 设存在 $P > 0$ 和 $S > 0$ 以及状态反馈控制律(5.9.2),使得

$$\begin{bmatrix} A_K^TP + PA_K + C_K^TC_K + S & PA_d & PB_1 \\ A_d^TP & -S & 0 \\ B_1^TP & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.9.5}$$

$$\begin{bmatrix} A_K^TP + PA_K + S + 2\alpha P & PA_d e^{\alpha d} \\ e^{\alpha d}A_d^TP & -S \end{bmatrix} < 0 \tag{5.9.6}$$

则 γ 是 α - 次优的。

【证明】 首先,我们证明,不等式(5.9.6)保证闭环系统(5.9.4)是 α - 一致渐近稳定的。考虑如下泛函微分方程

$$\dot{\eta}(t) = (A_K - \alpha I)\eta(t) + e^{-\alpha d}A_d\eta(t-d) \tag{5.9.7}$$

该方程是对闭环泛函微分方程(5.9.4)做状态变换

$$x(t) = e^{\alpha(t_0 - t)}\eta(t), t \geq t_0$$

而得到的。

根据 α - 稳定(指数稳定)的定义(定义 1.4.3),泛函微分方程(5.9.7)的零解的一致渐近稳定性保证了闭环系统(5.9.4)(令 $w(t)=0$)的 α - 一致渐近稳定性。

引入 Lyapunov 函数

$$V(t,\zeta_t) = \zeta^T(t)P\zeta(t) + \int_{t-d}^{t}\zeta^T(\theta)S\zeta(\theta)d\theta \tag{5.9.8}$$

显然存在常数 δ_1 和 δ_2,使得

$$\delta_1 \|\zeta(t)\|^2 \leq V(t,\zeta(t)) \leq \delta_2 \|\zeta(t)\|_c^2 \tag{5.9.9}$$

例如,取 $\delta_1 = \lambda_{\min}(P)$, $\delta_2 = \lambda_{\max}(P) + d\lambda_{\max}(S)$。

Lyapunov 函数(5.9.8)沿方程(5.9.7)的解轨迹的导数为

$$\dot{V}(t,\eta_t) = \dot{\eta}^T(t)P\eta(t) + \eta^T(t)P\dot{\eta}(t) + \eta^T(t)S\eta(t) - \eta^T(t-d)S\eta(t-d)$$

经代数运算,上式可写为如下矩阵形式

$$\dot{V}(t,\eta_t) = \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \eta(t-d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_K^TP + PA_K + S + 2\alpha P & PA_d e^{\alpha d} \\ e^{\alpha d}A_d^TP & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \eta(t-d) \end{bmatrix} \tag{5.9.10}$$

由式(5.9.6)可知,$\dot{V}(t,\eta_t) < 0$。于是,根据 Lyapunov 稳定性理论(定理 1.4.5),泛函微分方程(5.9.7)的零解是一致渐近稳定的,即闭环系统(5.9.4)(取 $w(t)=0$)的零解是 α - 一致渐近稳定的。

令 $\alpha=0$,则由式(5.9.10)可得 $\dot{V}(\cdot,\cdot)$沿闭环系统(5.9.4)的解轨迹的导数为

$$\dot{V}(t,x_t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_K^TP + PA_K + S & PA_d \\ A_d^TP & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix} \tag{5.9.11}$$

即 α - 一致渐近稳定也意味着一致渐近稳定。

其次,我们证明不等式(5.9.5)保证了在零初始条件下,闭环系统满足式(5.9.3)。

由于式(5.9.7)的零解的渐近稳定性保证了 $\|z(t)\|_2$ 的有界性,则在零初始条件下,我们有

$$J_{zw} = \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)]dt =$$

$$\int_0^\infty [x^T(t)C_K^TC_Kx(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)]dt$$

利用式(5.9.11),我们有

$$J_{zw}=\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)C_K^{\mathrm{T}}C_Kx(t)-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(t)w(t)+\dot{V}(t,x_t)]\mathrm{d}t+V(t,x_t)|_{t=0}-V(t,x_t)|_{t=\infty}\leqslant$$

$$\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-d)\\w(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A_K^{\mathrm{T}}P+PA_K+C_K^{\mathrm{T}}C_K+S & PA_d & PB_1\\A_d^{\mathrm{T}}P & -S & 0\\B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma^2I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-d)\\w(t)\end{bmatrix}\tag{5.9.12}$$

由严格负定不等式(5.9.5),可得 $J_{zw}<0$,即闭环系统满足式(5.9.3)。

综上所述,如果存在 $P>0$、$S>0$ 和反馈增益阵 K,使得式(5.9.5)和式(5.9.6)成立,则 γ 是 α - 次优的。 **证毕**

注 从定理 5.9.1 的证明过程,我们看到,矩阵不等式(5.9.5)保证了 H_∞ 性能指标(5.9.3)成立,而矩阵不等式(5.9.6)保证了闭环系统(5.9.4)是 α - 一致渐近稳定的。并且,不等式(5.9.5)不含任何时滞信息,而不等式(5.9.6)和时滞的大小有关。

还要注意的是,不等式(5.9.5)、(5.9.6)不是线性矩阵不等式。下面的定理将其转化为线性矩阵不等式。

【定理 5.9.2】 存在正定阵 $P>0$、$S>0$ 和控制律(5.9.2),使定理 5.9.1 的条件(5.9.5)和(5.9.6)成立,当且仅当存在三个矩阵 $Q>0$、$R>0$ 和 W,使得

$$\begin{bmatrix}QA^{\mathrm{T}}+AQ+W^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BW+\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}+R & A_dQ & W^{\mathrm{T}} & QC^{\mathrm{T}}\\QA_d^{\mathrm{T}} & -R & 0 & 0\\W & 0 & -I & 0\\CQ & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}<0\tag{5.9.13}$$

$$\begin{bmatrix}QA^{\mathrm{T}}+AQ+W^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BW+R+2\alpha Q & A_dQ\mathrm{e}^{\alpha d}\\\mathrm{e}^{\alpha d}QA_d^{\mathrm{T}} & -R\end{bmatrix}<0\tag{5.9.14}$$

【证明】 将 $A_K=A+BK$ 和 $C_K=C+DK$ 代入式(5.9.5)中,注意到假设(A_1)的正交性条件,并利用 Schur 补引理,得

$$\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}P+PA+K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P+PBK+C^{\mathrm{T}}C+F^{\mathrm{T}}F+S+\gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P & PA_d\\A_d^{\mathrm{T}}P & -S\end{bmatrix}<0$$

用

$$\begin{bmatrix}P^{-1} & 0\\0 & P^{-1}\end{bmatrix}$$

左乘和右乘上式,并做变量变换 $Q=P^{-1}>0$、$R=P^{-1}SP^{-1}>0$ 和 $W=KP^{-1}$,得

$$\begin{bmatrix}QA^{\mathrm{T}}+AQ+W^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BW+QC^{\mathrm{T}}CQ+W^{\mathrm{T}}W+R+\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} & A_dQ\\QA_d^{\mathrm{T}} & -R\end{bmatrix}<0$$

再由 Schur 补引理,上式等价于

$$\begin{bmatrix}QA^{\mathrm{T}}+AQ+W^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BW+QC^{\mathrm{T}}CQ+R+\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} & A_dQ & W^{\mathrm{T}}\\QA_d^{\mathrm{T}} & -R & 0\\W & 0 & -I\end{bmatrix}<0\Leftrightarrow$$

$$
\begin{bmatrix}
QA^{\mathrm{T}} + AQ + W^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + BW + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} + R & A_dQ & W^{\mathrm{T}} & QC^{\mathrm{T}} \\
QA_d^{\mathrm{T}} & -R & 0 & 0 \\
W & 0 & -I & 0 \\
CQ & 0 & 0 & -I
\end{bmatrix} < 0
$$

类似地,可证明式(5.9.6)与式(5.9.14)的等价性。 **证毕**

显然,固定 α 和 d,定理 5.9.2 给出了如下线性矩阵不等式的优化问题

$$
\begin{cases} \min \gamma \\ \text{s.t. 式(5.9.13) 和式(5.9.14) 成立} \end{cases} \tag{5.9.15}
$$

上式的解 γ^*、Q^*、W^* 和 R^* 依赖于参数 α 和 d。最后,利用定理 5.9.2 证明过程中给出的变量变换式,可求得无记忆状态反馈控制律

$$
u(t) = Kx(t) = W^* Q^{*-1}x(t) \tag{5.9.16}
$$

该控制律也依赖于参数 α 和 d,是一种时滞依赖型的 H_∞ 控制器。

第六章　H_2 标准控制

第二章讨论了无限时间线性二次型最优调节器问题。设计状态反馈控制律,使闭环系统内稳定(定理 2.4.2)且使二次型性能指标泛函达极小值。本章,我们在较一般的条件下,即所谓 H_2 标准控制框架下,求解上述问题,并考虑动态控制器的设计和次优控制问题。近年来,随着控制理论的发展,传统的最优控制理论也在不断完善,取得一些新进展。本章,我们将对最优控制领域的新成果做一定的介绍,包括不确定系统、不确定时滞系统的最优控制问题以及应用 LMI 方法求解最优(次优)控制问题的相应结果。

6.1　再论无限时间 LQR 问题

本节的目的在于指出 2.4 节讨论的无限时间 LQR 问题可以转换为图 6.1.1 所示的 H_2 标准控制问题。图中各信号的解释同图 4.2.1,且 $G(s)$ 的状态空间描述仍为式(4.2.1),只不过这里所取的系统性能为从 w 到 z 的闭环传函阵的 H_2 范数。从而,我们可以在这种标准框架下,求解 H_2 最优控制问题或 H_2 次优控制问题(其定义类似于定义 4.2.1 和定义4.2.2,具体见 6.3 节)。

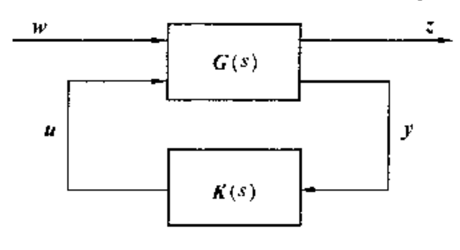


图 6.1.1　标准问题框图

考虑无限时间 LQR 问题。给定线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0 \tag{6.1.1}$$

设计状态反馈控制律 $u = Kx$,使如下二次型性能指标

$$J = \int_0^\infty (x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}Ru)\mathrm{d}t \tag{6.1.2}$$

取极小值。其中 $Q^{\mathrm{T}} = Q \geqslant 0, R^{\mathrm{T}} = R > 0$。我们将看到,上述最优控制问题可以化为图 6.1.1 所示的 H_2 标准控制问题。

定义辅助输出信号

$$z = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} u$$

式中 $Q^{\frac{1}{2}}$、$R^{\frac{1}{2}}$ 分别为 Q、R 的平方根矩阵($Q^{\frac{1}{2}\mathrm{T}}Q^{\frac{1}{2}} = Q, R^{\frac{1}{2}\mathrm{T}}R^{\frac{1}{2}} = R$),则有

$$z^{\mathrm{T}}z = \left(\begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} u\right)^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} u\right) = x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}Ru$$

于是

$$J = \int_0^\infty z^{\mathrm{T}}z\mathrm{d}t = \int_0^\infty \| z \|^2\mathrm{d}t = \| z \|_2$$

由于取状态反馈,所以有 $y = x$。于是,无限时间 LQR 问题的广义被控对象的状态空间描述为

$$
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \tag{6.1.3}
$$

$$
u = Ky \tag{6.1.4}
$$

问题归结为,对广义被控对象(6.1.3),设计状态反馈控制律(6.1.4),使性能指标

$$
J = \| z \|_2 \tag{6.1.5}
$$

取极小值。

注意,性能指标(6.1.5)为信号的2-范数,而非传函(阵)的2-范数。如果被控对象的状态方程取为

$$
\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u
$$

其中 w 为单位脉冲干扰信号(标量)。通过类似的推演,广义被控对象的状态空间描述为

$$
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \tag{6.1.6}
$$

性能指标(6.1.2)变为

$$
J = \int_0^{\infty} z^{\mathrm{T}}(t) z(t) \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} h^{\mathrm{T}}(t) h(t) \mathrm{d}t \tag{6.1.7}
$$

其中 $h(t)$ 为式(6.1.4)和式(6.1.6)构成的闭环系统的脉冲响应。

根据 Parseval 等式(1.2.12),式(6.1.7)可表示为

$$
J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T_{zw}^{\mathrm{T}}(\mathrm{j}\omega) T_{zw}(\mathrm{j}\omega) \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{trace}\{ T_{zw}(\mathrm{j}\omega) T_{zw}^{\mathrm{T}}(\mathrm{j}\omega) \} \mathrm{d}\omega
$$

其中 $T_{zw}(\cdot)$ 为从 w 到 z 的闭环传函阵。根据传函阵 H_2 范数的定义,有

$$
J = \| T_{zw}(s) \|_2^2
$$

问题成为图 6.6.1 所示的 H_2 标准控制问题,具体结构图如图 6.1.2 所示。由图得从 w 到 z 的闭环传函阵(向量)为

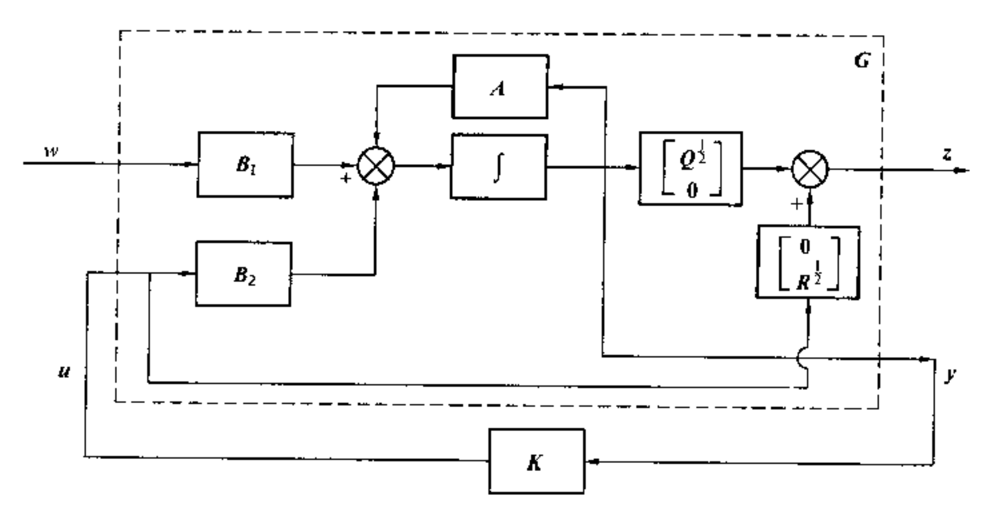


图 6.1.2 H_2 标准控制问题

$$T_{zw}(s)=\begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ R^{\frac{1}{2}}K \end{bmatrix}(sI-A-B_2K)^{-1}B_1$$

6.2 Lyapunov 方程与 H_2 范数

我们在 4.3 节讨论了 Riccati 方程(不等式)与 H_∞ 范数的关系。将传函阵的 H_∞ 范数界 γ 与某一个 Ricaati 方程(不等式)的解的存在性联系在一起,并且将 H_∞ 范数的计算转化为一个逐步搜索过程。与此类似,H_2 范数与 Lyapunov 方程之间也存在确定的关系,而传函阵的 H_2 范数的计算直接由相应的 Lyapunov 方程的解来决定。

6.2.1 Lyapunov 方程

考虑如下形式的 Lyapunov 方程

$$A^{\mathrm{T}}X+XA=-C^{\mathrm{T}}C \tag{6.2.1}$$

其中 $A,X\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $C\in\mathbf{R}^{m\times n}$。

【引理 6.2.1】 设 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是 A 的 n 个特征值。对于任意给定的 C,方程(6.2.1)存在惟一解 X 的充分必要条件为

$$\lambda_i+\lambda_j\neq 0 \qquad i,j=1,2,\cdots,n \tag{6.2.2}$$

引理中条件(6.2.2)说明,Lyapunov 方程(6.2.1)有惟一解的充分必要条件是 A 的特征值中没有关于原点对称分布的特征值。

【定理 6.2.1】 设(C,A)为能观测,则 Lyapunov 方程(6.2.1)具有正定解 $X>0$ 的充分必要条件为

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\}<0 \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{6.2.3}$$

其中 $\lambda_i(A)$, $i=1,2,\cdots,n$ 表示 A 的 n 个特征值。

【证明】 必要性。设方程(6.2.1)有正定解 $X>0$。令 v_i 是与 λ_i 对应的特征向量,则

$$Av_i=\lambda_iv_i$$

由于(C,A)为能观测,故 $Cv_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$。由方程(6.2.1)得

$$-v_i^*C^{\mathrm{T}}Cv_i=v_i^*(A^{\mathrm{T}}X+XA)v_i=(\lambda_i^*+\lambda_i)v_i^*Xv_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

故

$$\mathrm{Re}(\lambda_i)=-\frac{v_i^*C^{\mathrm{T}}Cv_i}{2v_i^*Xv_i}<0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

充分性。设 $\lambda_i(A)<0$, $i=1,2,\cdots,n$,令

$$W(t)=\mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t}C^{\mathrm{T}}C\mathrm{e}^{At}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t)=A^{\mathrm{T}}W(t)+W(t)A$$

对上式两端从 0 到 ∞ 积分,得

$$W(\infty)-W(0)=A^{\mathrm{T}}\int_0^\infty W(t)\mathrm{d}t+\int_0^\infty W(t)\mathrm{d}t\cdot A \tag{6.2.4}$$

令

$$X = \int_0^\infty W(t)\mathrm{d}t \tag{6.2.5}$$

并注意到 $W(0)=C^{\mathrm{T}}C, W(\infty)=0$($A$ 稳定),所以,由式(6.2.4)和式(6.2.5)可知,X 满足方程(6.2.1),且由(C,A)能观测性条件得能观测性 Gramian 矩阵

$$\int_0^t \mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t}C^{\mathrm{T}}C\mathrm{e}^{At}\mathrm{d}t > 0, \forall t$$

所以,$X>0$。 **证毕**

【定理 6.2.2】 设(C,A)为能检测,则 Lyapunov 方程(6.2.1)具有非负定解 $X\geqslant 0$ 的充分必要条件为

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\}<0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

【证明】 必要性。设方程(6.2.1)有半正定解 $X\geqslant 0$。令 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$是与 λ_i 相应的特征向量。

反证。设存在 i,使得 $\mathrm{Re}\,\lambda_i\geqslant 0$。由($C,A$)能检测性条件,$Cv_i\neq 0$。由方程(6.2.1),得

$$-v_i^* C^{\mathrm{T}}Cv_i = v_i^*(A^{\mathrm{T}}X+XA)v_i = (\lambda_i^*+\lambda_i)v_i^*Xv_i = 2\mathrm{Re}\,\lambda_i v_i^* Xv_i$$

由上式,可推得 $\mathrm{Re}\lambda_i>0$ 且 $v_i^*Xv_i<0$。这与 $X\geqslant 0$ 矛盾,故 $\mathrm{Re}\lambda_i<0, i=1,2,\cdots,n$。

充分性。与定理 6.2.1 充分性的证明相同,只需注意

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t}C^{\mathrm{T}}C\mathrm{e}^{At}\mathrm{d}t \geqslant 0$$

证毕

由定理 6.2.1 和定理 6.2.2 可证如下一些推论。

【推论 6.2.1】 对于给定的正定阵 $Q>0$,Lyapunov 方程

$$A^{\mathrm{T}}X + xA = -Q \tag{6.2.6}$$

有正定解 $X>0$ 的充分必要条件为

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0 \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{6.2.7}$$

【推论 6.2.2】 设(A,B)为能控,则 Lyapunov 方程

$$A^{\mathrm{T}}X + XA = -BB^{\mathrm{T}} \tag{6.2.8}$$

有正定解 $X>0$ 的充分必要条件为式(6.2.7)成立。

【推论 6.2.3】 设(A,B)为能稳定,则 Lyapunov 方程(6.2.8)有非负定解 $X\geqslant 0$ 的充分必要条件为式(6.2.7)成立。

6.2.2 H_2 范数的计算

我们在 1.2 节定义了频域函数空间向量的 H_2 范数。对于稳定的传函阵 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$,它的 H_2 范数定义为

$$\|G(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{trace}\{G^*(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega)\}\mathrm{d}\omega \tag{6.2.9}$$

显然,为了保证式(6.2.9)的广义积分收敛,$G(s)$必须是严格正则的,即 $G(s)$的状态空间实现为

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B \tag{6.2.10}$$

或者说,对于给定的 $0<\gamma<\infty$,为了使 $\|C(sI-A)^{-1}B+D\|_2<\gamma<\infty$,必须取 $D=0$。

在时域函数空间中,函数矩阵的 H_2 范数的定义为式(1.2.4)。

【定理 6.2.3】 设 $G(s)\in RH_2$ 的状态空间实现为式(6.2.10),其中 A 为稳定阵,则

$$\| G(s) \|_2^2 = \text{trace}(CL_cC^T) \tag{6.2.11}$$

这里，L_c 为 Lyapunov 方程

$$AL_c + L_cA^T = -BB^T \tag{6.2.12}$$

的非负定解。

【证明】 因为

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = \begin{cases} Ce^{At}B & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

由 Parseval 等式(1.2.4)以及矩阵迹的性质(见附录)，有

$$\| G(s) \|_2^2 = \| h(t) \|_2^2 = \text{trace}\left\{\int_0^\infty Ce^{At}BB^Te^{A^Tt}C^T\mathrm{d}t\right\} =$$

$$\text{trace}\left\{C\int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt}\mathrm{d}tC^T\right\} = \text{trace}(CL_cC^T)$$

其中

$$L_c = \int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt}\mathrm{d}t \geq \mathbf{0}$$

L_c 称为对(A, B)的能控性 Gramian 矩阵。

可以证明上式给出的 L_c 是 Lyapunov 方程(6.2.12)的解。事实上

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{At}BB^Te^{A^Tt} = Ae^{At}BB^Te^{A^Tt} + e^{At}BB^Te^{A^Tt}A^T$$

将上式两端从 0 到 ∞ 积分，并注意到 A 为稳定阵，得

$$-BB^T = AL_c + L_cA^T$$

证毕

类似地，有如下定理。

【定理 6.2.4】 设 $G(s) \in RH_2$ 的状态空间实现为式(6.2.10)，其中 A 为稳定阵，则

$$\| G(s) \|_2^2 = \text{trace}(B^TL_0B) \tag{6.2.13}$$

其中(C, A)的能观测性 Gramian 矩阵

$$L_0 = \int_0^\infty e^{A^Tt}C^TCe^{At}\mathrm{d}t$$

为 Lyapunov 方程

$$A^TL_0 + L_0A = -C^TC \tag{6.2.14}$$

的非负定解。

定理 6.2.3 和定理 6.2.4 给出了计算 H_2 范数的方法。首先求解线性矩阵方程式(Lyapunov 方程)(6.2.12)或(6.2.14)，然后按式(6.2.11)或式(6.2.13)计算传函阵的 H_2 范数。可见，相比 H_∞ 范数的计算，H_2 范数的计算要简单得多。

6.3 基于 Riccati 方程的输出反馈解

6.3.1 基于 Riccati 方程的输出反馈解

第二章讨论了 LQ 状态反馈、输出反馈最优调节器问题，得到了静态最优控制器的设计方法，但没有考虑动态控制器设计问题和次优控制问题。

本节在图 6.1.1 所示的标准框架下,采用 Riccati 方程方法,求解 H_2 最优控制输出反馈动态控制器和 H_2 次优控制输出反馈动态控制器设计问题。设图 6.1.1 中广义被控对象 G 的状态空间实现为

$$G(s)=\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.3.1}$$

如下假设条件成立:

(A_1) (A,B_1)能稳定,(C_1,A)能检测。

(A_2) (A,B_2)能稳定,(C_2,A)能检测。

(A_3) $D_{12}^{\mathrm{T}}[C_1 \quad C_{12}]=[0 \quad I]$。

(A_4) $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$。

关于上述假设条件的讨论与解释,见第四章的相关内容,此处不再赘述。

【定义 6.3.1】(H_2 最优控制问题) 求一正则实有理控制器 K,使图 6.1.1 所示闭环系统内稳定,且使从 w 到 z 的闭环传函阵 $T_{zw}(s)$的 H_2 范数达极小,即

$$\min_K \| T_{zw}(s) \|_2 \tag{6.3.2}$$

【定义 6.3.2】(H_2 次优控制问题) 给定 $\gamma>\min\limits_K \| T_{zw}(s) \|_2$,求一正则实有理的控制器 K,使闭环内稳定,且使

$$\| T_{zw}(s) \|_2 < \gamma \tag{6.3.3}$$

我们把上述两个定义给出的 H_2 最优与次优控制问题,统称为 H_2 标准控制问题,并且,可以分别得到 H_2 最优和 H_2 次优控制问题的解。这一点与 H_∞ 标准控制问题是不同的。

下面在假设(A_1)~(A_4)下,求解以上两定义给出的 H_2 最优和次优控制问题的动态输出反馈控制律 $u=K(s)y$。为此,首先定义如下两个传函阵

$$G_c(s)=\begin{bmatrix} A+B_2F_2 & I \\ C_1+D_{12}F_2 & 0 \end{bmatrix},\ G_f(s)=\begin{bmatrix} A+L_2C_2 & B_1+L_2D_{21} \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $F_2=-B_2^{\mathrm{T}}X_2$,$L_2=-Y_2C_2^{\mathrm{T}}$,$X_2\geqslant 0$,$Y_2\geqslant 0$ 分别为如下两个 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}X_2+X_2A-X_2B_2B_2^{\mathrm{T}}X_2+C_1^{\mathrm{T}}C_1=0 \tag{6.3.4a}$$

$$AY_2+Y_2A^{\mathrm{T}}-Y_2C_2^{\mathrm{T}}C_2Y_2+B_1B_1^{\mathrm{T}}=0 \tag{6.3.4b}$$

的解(由假设(A_1)、(A_2)和定理 4.3.1,此两解必存在)。

【定理 6.3.1】 H_2 最优控制输出反馈惟一最优解为

$$K(s)=\begin{bmatrix} \hat{A}_2 & -L_2 \\ F_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.3.5}$$

并且有 $\min \| G_{zw}(s) \|_2^2=\| G_cB_1 \|_2^2+\| F_2G_f \|_2^2=\| G_cL_2 \|_2^2+\| C_1G_f \|_2^2$,其中 $\hat{A}_2=A+B_2F_2+L_2C_2$,$X_2\geqslant 0$,$Y_2\geqslant 0$ 由 Riccati 方程(6.3.4a)和(6.3.4b)给定。

类似于定理 4.5.3,可以给出定义 6.3.2 中的 H_2 次优控制问题的所有解的集合(参数化形式解)。

【定理 6.3.2】 H_2 次优控制问题的所有解等于图 6.3.1 中从 y 到 u 的传函阵的集合。其中 $Q(s)\in RH_2$,$\| Q(s) \|_2^2<\gamma^2-\| G_cB_1 \|_2^2+\| F_2G_f \|_2^2$。$M_2$ 的状态空间实现为

$$M_2(s)=\begin{bmatrix}\hat{A}_2 & L_2 & B_2\\ -F_2 & 0 & -I\\ C_2 & I & 0\end{bmatrix}$$

以上结果中，如令参数 $Q(s)=0$，则得到定理6.3.1中 H_2 最优控制器(6.3.5)。

定理6.3.1和定理6.3.2的推导过程完全平行于定理4.5.2和定理4.5.3，可见文献[42]。

最后，我们指出，式(6.3.5)的 H_2 最优控制器 $K(s)$ 可写为如下的标准观测器形式

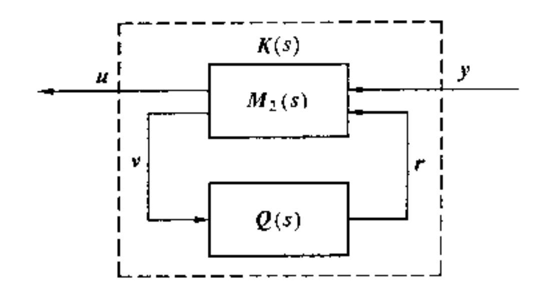


图6.3.1 控制器参数化

$$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+B_2u+L_2(C_2\hat{x}-y)$$
$$u=F_2\hat{x}$$

其中 $\hat{x}$ 是 x 的最优估计。类似于4.5.3小节的分析，这种 H_2 输出反馈最优控制器具有结构分离特性。

6.3.2 同时 H_2 控制器参数化

4.5.3小节根据单目标 H_∞ 控制器参数化结果，得到了满足 H_∞ 性能的同时镇定控制器参数化公式。同样，根据定理6.3.2的单目标 H_2 控制器参数化结果，可推得满足 H_2 性能的同时镇定控制器参数化公式。首先将定理6.3.2的参数化结果转换到频率域，类似于4.5.3小节的推演，我们有以下结果。将图6.3.1中传函阵 M_2 分块，可写出

$$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=M_2\begin{bmatrix}y\\ r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_2^1 & M_2^2\\ M_2^3 & M_2^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ r\end{bmatrix}$$

并可求得

$$\begin{aligned}M_2^1&=-B_2^{\mathrm{T}}X_2(sI-\hat{A}_2)^{-1}Y_2C_2^{\mathrm{T}},M_2^2=B_2^{\mathrm{T}}X_2(sI-\hat{A}_2)^{-1}B_2-I\\ M_2^3&=-C_2(sI-\hat{A}_2)^{-1}Y_2C_2^{\mathrm{T}}+I,M_2^4=C_2(sI-\hat{A}_2)^{-1}B_2\end{aligned}\tag{6.3.6}$$

于是从 y 到 u 的传函阵为

$$K(s)=G_{uy}(s)=M_2^1+M_2^2Q(I-M_2^4Q)^{-1}M_2^3$$

【定理6.3.3】 (1) $M_2^2(s)$、$M_2^3(s)$ 为非奇异矩阵。

(2) 广义对象 G 的满足性能指标(6.3.3)的镇定控制器的集合为

$$\begin{aligned}S_2(K)=\{&K(Q)=(\widetilde{M}_2^1+\widetilde{M}_2^2Q)(I-M_2^4Q)^{-1}M_2^3\mid Q\in RH_2,\|Q\|_2^2<\gamma^2-\\ &(\|G_cB_1\|_2^2+\|-B_2^{\mathrm{T}}X_2G_f\|_2^2),\det(I-M_2^4Q)\neq 0\}=\end{aligned}\tag{6.3.7a}$$

$$\begin{aligned}\{&K(Q)=M_2^2(I-QM_2^4)^{-1}(\overline{M}_2^1+Q\overline{M}_2^3)\mid Q\in RH_2,\|Q\|_2^2<\gamma^2-\\ &(\|G_cB_1\|_2^2+\|-B_2^{\mathrm{T}}X_2G_f\|_2^2,\det(I-QM_2^4)\neq 0\}\end{aligned}\tag{6.3.7b}$$

其中 M_2^1、M_2^2、M_2^3 和 M_2^4 如式(6.3.6)所示，而

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_2^1&=M_2^1M_2^{3^{-1}},\widetilde{M}_2^2=M_2^2-M_2^1M_2^{3^{-1}}M_2^4\\ \overline{M}_2^1&=M_2^{2^{-1}}M_2^1,\overline{M}_2^3=M_2^3-M_2^4M_2^{2^{-1}}M_2^1\end{aligned}\tag{6.3.8}$$

X_2、Y_2 为 Riccati 方程(6.3.4a)和(6.3.4b)的解。

根据上述定理，可给出 $l+1$ 个广义对象的同时 H_2 控制器参数化公式。

【定义 6.3.3】(H_2 性能) 同时镇定 H_2 范数性能指标为

$$\| T_{zwj} \|_2 < \gamma \qquad j = 0,1,\cdots,l \tag{6.3.9}$$

其中 T_{zwj}为第j个广义对象G_j的从w_j到z_j的闭环传函阵,$0<\gamma\in \mathbf{R}$。

【定理 6.3.4】 $l+1$个广义对象$G_j(j=0,1,\cdots,l)$的满足性能指标(6.3.9)的同时镇定控制器的集合为

$$\begin{aligned}
&S_l^2(K) = \{K_0(Q_0)\} = (\widetilde{M}_2^{10} + \widetilde{M}_2^{20} Q_0)(I - M_2^{40} Q_0)^{-1} M_2^{30} \mid Q_0 \in \Lambda\} \\
&\Lambda = \{Q_0 \in RH_2, \| Q_0 \|_2^2 < \gamma^2 - \| G_{co} B_{10} \|_2^2 + \| - B_{20}^{\mathrm{T}} X_{20} G_{f0}) \|_2^2, \\
&\quad \det(I - M_2^{40} Q_0) \neq 0, 且 \exists Q_j \in RH_2, \| Q_j \|_2^2 < \gamma^2 - (\| G_{cj} B_{1j} \|_2^2 + \\
&\quad \| - B_{2j}^{\mathrm{T}} X_{2j} G_{fj} \|_2^2), \det(I - M_2^{4j} Q_j) \neq 0, s.t.\ T_{0j} - T_{1j} Q_j + Q_0 T_{2j} + \\
&\quad Q_0 T_{3j} Q_j = 0, j = 1,2,\cdots,l\}
\end{aligned} \tag{6.3.10}$$

其中取 G_0 为主对象,K_0 为主控制器,而

$$T_{0j} = \overline{M}_2^{10} M_2^{3j^{-1}} - M_2^{20^{-1}} \widetilde{M}_2^{1j}, T_{1j} = M_2^{20^{-1}} \widetilde{M}_2^{2j} + \overline{M}_2^{10} M_2^{3j^{-1}} M_2^{4j}$$

$$T_{2j} = \overline{M}_2^{30} M_2^{3j^{-1}} + M_2^{40} M_2^{20^{-1}} \widetilde{M}_2^{1j}, T_{3j} = M_2^{40} M_2^{20^{-1}} \widetilde{M}_2^{2j} - \overline{M}_2^{30} M_2^{3j^{-1}} M_2^{4j}$$

上述结果的具体应用类似于4.5.3小节,可参阅例4.5.2。

6.4 基于 LMI 的输出反馈解

上节的定理6.3.2给出了基于 Riccati 方法的输出反馈 H_2 次优控制器解的集合,即

$$K(s) = \mathrm{LFT}(M_2, Q) \tag{6.4.1}$$

本节我们利用上述结果,推导基于 LMI 方法的输出反馈 H_2 次优控制器的设计方法。

设图6.1.1中广义对象 G 的一个实现为

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

假设:

(B_1) (A, B_2)能稳定。

(B_2) (C_2, A)能检测。

(B_3) $D_{11} - D_{12} D_{12}^{+} D_{11} D_{21}^{+} D_{21} = 0$。其中 A^{+} 为 A 的 Moore-Penrose 广义逆,具有如下性质:$AA^{+}A = A, A^{+}AA^{+} = A^{+}, (AA^{+})^{*} = AA^{+}, (A^{+}A)^{*} = A^{+}A$。

假设(B_1)、(B_2)是保证闭环系统内稳定的必要条件。假设(B_3)是 H_2 问题可解性的必要条件,即,为保证 H_2 范数是有限的,闭环传函阵中的直接传输项必须等于零(见本节最后的讨论)。除此之外,我们不做任何其它的假设。

图6.1.1中从 w 到 z 的闭环传函阵为

$$G_{zw} = \mathrm{LFT}(G, K) = G_{11} + G_{12}(I - KG_{22})^{-1} KG_{21}$$

当 $K(s)$的状态空间实现取为

$$K(s) = [A_K, B_K, C_K, D_K]$$

时,则分别写出 $G(s)$和 $K(s)$的状态方程表达式,不难推得 G_{zw}的状态空间实现

$$G_{zw}=\left[\begin{array}{cc|c} A+B_2D_KC_2 & B_2C_K & B_1+B_2D_KD_{21} \\ B_KC_2 & A_K & B_KD_{21} \\ \hline C_1+D_{12}D_KC_2 & D_{12}C_K & D_{11}+D_{12}D_KD_{21} \end{array}\right] \tag{6.4.2}$$

根据定理6.3.2,在假设(B_1)、(B_2)下,G 的所有 H_2 次优控制器由一稳定的参数阵 $Q(s)$ 所参数化,如式(6.4.1)。设 $Q(s)$的状态空间实现为

$$Q(s)=[A_Q,B_Q,C_Q,D_Q]$$

则 $K(s)$的实现为

$$K(s)=\left[\begin{array}{cc|c} A_Q & B_QC_2 & B_Q \\ B_2C_Q & A+B_2D_QC_2+B_2F_2+L_2C_2 & L_2+B_2D_Q \\ \hline -C_Q & -F_2-D_QC_2 & -D_Q \end{array}\right] \tag{6.4.3}$$

于是,G_{zw}的一个实现为

$$G_{zw}=[A_c,B_c,C_c,D_c] \tag{6.4.4}$$

其中

$$A_c=\begin{bmatrix} A+B_2F_2 & -B_2C_Q & -B_2(F_2+D_QC_2) \\ 0 & A_Q & B_QC_2 \\ 0 & 0 & A+L_2C_2 \end{bmatrix} \tag{6.4.5}$$

$$B_c=\begin{bmatrix} B_1-B_2D_QD_{21} \\ B_QD_{21} \\ B_1+L_2D_{21} \end{bmatrix} \tag{6.4.6}$$

$$C_c=[C_1+D_{12}F_2 \quad -D_{12}C_Q \quad -D_{12}(F_2+D_QC_2)] \tag{6.4.7}$$

$$D_c=D_{11}-D_{12}D_QD_{21} \tag{6.4.8}$$

G_{zw}的实现(6.4.4)是将式(6.4.3)代入式(6.4.2),然后,对式(6.4.2)的 A、B、C 矩阵,做非奇异线性变换 $T^{-1}AT,T^{-1}B,CT$,其中

$$T=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -I & 0 & I \end{bmatrix}$$

而得到的。

下述引理给出了 H_2 范数的状态空间性质,这些性质是构成 H_2 次优控制问题的LMI方法的基础。

【引理 6.4.1】 如下命题等价:

(1) A 是稳定的,且 $\|C(sI-A)^{-1}B\|_2<\gamma$。

(2) 存在矩阵 $X=X^{\mathrm{T}}>0$,使得

$$XA+A^{\mathrm{T}}X+C^{\mathrm{T}}C<0 \tag{6.4.9}$$

$$\mathrm{trace}(B^{\mathrm{T}}XB)<\gamma^2 \tag{6.4.10}$$

(3) 存在矩阵 $X=X^{\mathrm{T}}$, $W=W^{\mathrm{T}}$,使得

$$\begin{bmatrix} XA+A^{\mathrm{T}}X & C^{\mathrm{T}} \\ C & -I \end{bmatrix}<0 \tag{6.4.11}$$

$$\begin{bmatrix} W & B^{\mathrm{T}} \\ B & X^{-1} \end{bmatrix}>0 \tag{6.4.12}$$

$$\operatorname{trace} W < \gamma^2 \tag{6.4.13}$$

【证明】 (1)⇒(2)。如果(1)成立,则存在充分小的 $\varepsilon > 0$,使得当 C 扩张为 $[C^{\mathrm{T}} \quad \varepsilon^{\frac{1}{2}} I]^{\mathrm{T}}$ 时

$$\left\| \begin{bmatrix} C \\ \varepsilon^{\frac{1}{2}} I \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} B \right\|_2 < \gamma$$

仍成立。将定理 6.2.4 应用于该新系统,我们有

$$\begin{aligned} XA + A^{\mathrm{T}}X + C^{\mathrm{T}}C &= -\varepsilon I < 0 \\ \operatorname{trace}(B^{\mathrm{T}}XB) &< \gamma^2 \end{aligned} \tag{6.4.14}$$

对某 $X = X^{\mathrm{T}} \geqslant 0$ 成立。反证法证明等号不成立。设 X 是奇异的,则存在向量 $v \neq 0$,满足 $Xv = 0$。将方程(6.4.14)两端分别左乘 v^{T},右乘 v,得到 $v^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}Cv < 0$,矛盾。因此,$X > 0$。

(2) ⇒(1),根据 Lyapunov 稳定性理论,方程(6.4.9)有正定解 $X > 0$ 隐含 A 是稳定的。令 $\hat{C}$ 是由下式定义的矩阵

$$XA + A^{\mathrm{T}}X + C^{\mathrm{T}}C = -\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C} < 0$$

应用定理 6.2.4,得到

$$\left\| \begin{bmatrix} C \\ \hat{C} \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} B \right\|_2 < \gamma$$

因此,$\| C(sI - A)^{-1}B \|_2 < \gamma$。

(2)⇔(3)。方程(6.4.9)和(6.4.11)之间的等价性是 Schur 补引理的直接结果。而且,方程(6.4.10)等价于方程(6.4.13)和 $W - B^{\mathrm{T}}XB > 0$。最后,$W - B^{\mathrm{T}}XB > 0$ 和 $X > 0$ 等价于方程(6.4.12)。

证毕

【引理 6.4.2】[88] 考虑线性矩阵方程

$$D + AXB = 0$$

(1) 上述方程有解 X,当且仅当

$$D - AA^{+}DB^{+}B = 0$$

(2) 参数化形式的所有解为

$$X = -A^{+}DB^{+} + S - A^{+}ASBB^{+}$$

其中 S 为具适当维数的任意矩阵。

下面,我们利用引理 6.4.1 给出的 H_2 范数的 LMI 性质来求解 H_2 次优控制问题。

【定理 6.4.1】 假设(B_1)、(B_2)和(B_3)成立。

(1) H_2 次优控制问题是可解的,当且仅当存在矩阵 $X = X^{\mathrm{T}}, M, Y = Y^{\mathrm{T}}, N, R, W = W^{\mathrm{T}}$,使得如下方程(不等式)成立

$$D_{11} + D_{12}RD_{21} = 0 \tag{6.4.15}$$

$$\begin{bmatrix} AX + B_2M + (AX + B_2M)^{\mathrm{T}} & (C_1X + D_{12}M)^{\mathrm{T}} \\ C_1X + D_{12}M & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{6.4.16}$$

$$\begin{bmatrix} (YA + NC_2)^{\mathrm{T}} + YA + NC_2 & (C_1 + D_{12}RC_2)^{\mathrm{T}} \\ C_1 + D_{12}RC_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{6.4.17}$$

$$\begin{bmatrix} W & (B_1 + B_2RD_{21})^{\mathrm{T}} & (YB_1 + ND_{21})^{\mathrm{T}} \\ B_1 + B_2RD_{21} & X & I \\ YB_1 + ND_{21} & I & Y \end{bmatrix} > 0 \tag{6.4.18}$$

$$\operatorname{trace} W < \gamma^2 \tag{6.4.19}$$

(2) 当条件(6.4.15) ~ (6.4.19)成立时，H_2 次优控制器由下式给定

$$K(s) = (A_K, B_K, C_K, D_K) \tag{6.4.20}$$

其中

$$\begin{aligned} & D_K = R \\ & C_K = -D_KC_2 + MX^{-1} \\ & B_K = B_2D_K - Z^{-1}(XN - B_2D_K) \\ & A_K = A + B_2D_KC_2 + B_2C_K - B_KC_2 + J \\ & J = Z^{-1}\{(AX + B_2M) + X(A + B_2D_KC_2)^{\mathrm{T}} + \\ & \quad X(C_1 + D_{12}D_KC_2)^{\mathrm{T}}(C_1X + D_{12}M)\}X^{-1} \\ & Z = XY - I \end{aligned} \tag{6.4.21}$$

注意，方程(6.4.15) ~ (6.4.19)是耦合的，这一点与上节的二个解耦的 Riccati 方程是不同的。

【证明】 充分性。设方程(6.4.15) ~ (6.4.19)成立。我们将证明定理中所给定的控制器镇定 G 且保证 $\| G_{zw}(s) \|_2 < \gamma$。

为表达简洁起见，我们定义如下记号

$$\begin{bmatrix} A_R & B_{1R} \\ C_{1R} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2RC_2 & B_1 + B_2RD_{21} \\ C_1 + D_{12}RC_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.4.22}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_3 & \Sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + B_2M & YA + NC_2 \\ C_1X + D_{12}M & YB_1 + ND_{21} \end{bmatrix} \tag{6.4.23}$$

由条件(6.4.18)，我们有

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0$$

上式等价于

$$X > 0, X^{-1}Z > 0$$

所以，式(6.4.21)中的各方程有定义。对于式(6.4.20)的控制器，G_{zw} 的实现由式(6.4.2)给定。将式(6.4.21)代入式(6.4.2)，并对式(6.4.2)的 A、B、C 矩阵做等价变换

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}$$

我们得到

$$G_{zw} = \{A_c, B_c, C_c, 0\}$$

其中

$$A_c=\begin{bmatrix} A+B_2D_KC_2+B_2C_K & B_2C_K \\ J & A+B_2D_KC_2-B_KC_2+J \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}=\Sigma_1 X^{-1}$$

$$A_{12}=\Sigma_1 X^{-1}-A_R$$

$$A_{21}=Z^{-1}(\Sigma_1+XA_R^{\mathrm{T}}+XC_{1R}^{\mathrm{T}}\Sigma_3)X^{-1}$$

$$A_{22}=Z^{-1}(\Sigma_1+X\Sigma_2X-A_RX+XA_R^{\mathrm{T}}+XC_{1R}^{\mathrm{T}}\Sigma_3)X^{-1}$$

$$B_c=\begin{bmatrix} B_1+B_2D_KD_{21} \\ -B_1-B_2D_KD_{21}+D_KD_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{1R} \\ Z^{-1}(B_{1R}-X\Sigma_4) \end{bmatrix}$$

$$C_c=[C_1+D_{12}D_KC_2+D_{12}C_K \quad D_{12}C_K]=[\Sigma_3X^{-1} \quad \Sigma_3X^{-1}-C_{1R}]$$

因此,为证充分性,我们只需证明 A_c 是稳定的,且

$$\| G_{zw}(s) \| = \| C_c(sI-A_c)^{-1}B_c \|_2<\gamma$$

根据引理 6.4.1,基于式(6.4.15)~(6.4.19)的条件,等价于证明存在 $X_c=X_c^{\mathrm{T}}>0$,使得

$$\Phi_A=\begin{bmatrix} X_cA_c+A_c^{\mathrm{T}}X_c & C_c^{\mathrm{T}} \\ C_c & -I \end{bmatrix}<0 \tag{6.4.24}$$

$$\Phi_B=\begin{bmatrix} W & B_c^{\mathrm{T}}X_c \\ X_cB_c & X_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W & B_c^{\mathrm{T}} \\ B_c & X_c^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X_c \end{bmatrix}>0 \tag{6.4.25}$$

令 Φ_X、Φ_Y、Φ_{XY}分别等于式(6.4.16)~(6.4.18)的左端。

我们将看到

$$X_c=\text{block}-\text{diag}[X^{-1} \quad X^{-1}Z]>0 \tag{6.4.26}$$

即为这样的矩阵。事实上,将 A_c、C_c 和 X_c 代入式(6.4.24),经简单的运算可得

$$\Phi_A=\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ X^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma_1+\Sigma_1^{\mathrm{T}} & \Sigma_3^{\mathrm{T}}C_{1R} & -\Sigma_3^{\mathrm{T}} \\ C_{1R}^{\mathrm{T}}\Sigma_3 & \Sigma_2+\Sigma_2^{\mathrm{T}} & C_{1R}^{\mathrm{T}} \\ -\Sigma_3 & C_{1R} & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X^{-1} & X^{-1} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

且容易验证如下方程成立

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1+\Sigma_1^{\mathrm{T}} & \Sigma_3^{\mathrm{T}}C_{1R} & -\Sigma_3^{\mathrm{T}} \\ C_{1R}^{\mathrm{T}}\Sigma_3 & \Sigma_2+\Sigma_2^{\mathrm{T}} & C_{1R}^{\mathrm{T}} \\ -\Sigma_3 & C_{1R} & -I \end{bmatrix}=T_A^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \Phi_X & 0 \\ 0 & \Phi_Y \end{bmatrix}T_A<0$$

其中

$$T_A=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \Sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \Sigma_3 & 0 & I \end{bmatrix}$$

因此,我们得到 $\Phi_A<0$。类似地,Φ_B 可被表达为

$$\Phi_B=\begin{bmatrix} W & B_{1R}^{\mathrm{T}}X^{-1} & B_{1R}^{\mathrm{T}}X^{-1}-\Sigma_4^{\mathrm{T}} \\ X^{-1}B_{1R} & X^{-1} & 0 \\ X^{-1}B_{1R}-\Sigma_4 & 0 & X^{-1}Z \end{bmatrix}=T_B^{\mathrm{T}}\Phi_{XY}T_B>0$$

其中

$$T_B=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & X^{-1} & X^{-1} \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

所以充分性得证。

必要性。考虑 G_{zw}的状态空间实现(6.4.4)~(6.4.8)。

由假设(B_1)和(B_2),存在 F、L,使得 $A+B_2F$ 和 $A+LC_2$ 是稳定阵。设 $K(s)$是 H_2 次优控制器,则 $K(s)$必由式(6.4.3)给定,其中 $Q(s)$是稳定的。因此,G_{zw}的状态空间实现(6.4.4)~(6.4.8)中,A_c 必稳定,且有

$$\| G_{zw} \|_2 = \| C_c(sI-A_c)^{-1}B_c + D_c \|_2 < \gamma$$

为保证 H_2 范数有限,必有 $D_c=0$,再由引理 6.4.1,必存在 $X_c=X_c^{\mathrm{T}}$, $W=W^{\mathrm{T}}$,使得

$$\begin{bmatrix} X_cA_c + A_c^{\mathrm{T}}X_c & C_c^{\mathrm{T}} \\ C_c & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{6.4.27}$$

$$\begin{bmatrix} W & B_c^{\mathrm{T}} \\ B_c & X_c^{-1} \end{bmatrix} > 0 \tag{6.4.28}$$

$$\operatorname{trace} W < \gamma^2 \tag{6.4.29}$$

式(6.4.15)的证明 在式(6.4.8)中,定义

$$R = -D_Q \tag{6.4.30}$$

并利用 $D_c=0$,即得式(6.4.15)。

式(6.4.16)的证明 根据式(6.4.28),我们有 $X_c=X_c^{\mathrm{T}}>0$。用 bolck-diag[X_c^{-1} I]左乘和右乘式(6.4.27)的两端,得到

$$\begin{bmatrix} A_cX_c^{-1} + X_c^{-1}A_c^{\mathrm{T}} & X_c^{-1}C_c^{\mathrm{T}} \\ C_cX_c^{-1} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{6.4.31}$$

按 A_c 将 X_c^{-1} 分块为

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{21}^{\mathrm{T}} & X_{31}^{\mathrm{T}} \\ X_{21} & X_{22} & X_{32}^{\mathrm{T}} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix} = X_c^{-1} > 0 \tag{6.4.32}$$

并定义

$$\begin{aligned} X &= X_{11} > 0 \\ M &= FX_{11} - C_QX_{21} - (F + D_QC_2)X_{31} \end{aligned} \tag{6.4.33}$$

用如下矩阵和它的转置左乘和右乘式(6.4.32),即得式(6.4.16)。

式(6.4.17)的证明 定义变换阵

$$T=\begin{bmatrix} I & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

和

$$\widetilde{A}_c = T^{-1}A_cT = \begin{bmatrix} A + B_2F & -B_2C_Q & -(L + B_2D_Q)C_2 \\ 0 & A_Q & B_QC_2 \\ 0 & 0 & A + LC_2 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{C}_c = C_cT = [C_1 + D_{12}F \quad -D_{12}C_Q \quad C_1 - D_{12}D_QC_2]$$

$$\widetilde{X}_c = T^{\mathrm{T}}X_cT$$

且 block-diag(T, I)和它的转置左乘和右乘式(6.4.27),得

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X}_c\widetilde{A}_c + \widetilde{A}_c^{\mathrm{T}}\widetilde{X}_c & \widetilde{C}_c^{\mathrm{T}} \\ \widetilde{C}_c & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{6.4.34}$$

按 $\widetilde{A}_c$ 将 $\widetilde{X}_c$ 分块为

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21}^{\mathrm{T}} & Y_{31}^{\mathrm{T}} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{32}^{\mathrm{T}} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} = \widetilde{X}_c > 0 \tag{6.4.35}$$

并定义

$$\begin{aligned} Y &= Y_{33} \\ N &= Y_{33}L + Y_{32}B_Q - Y_{32}(L + B_2D_Q) \end{aligned} \tag{6.4.36}$$

用如下矩阵和它的转置

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

左乘和右乘式(6.4.34),并做替换 $D_Q = -R$,即得式(6.4.17)。

式(6.4.18)的证明 注意到$[Y_{31} \quad Y_{32} \quad Y_{33} - Y_{31}] = [0 \quad 0 \quad I]\widetilde{X}_cT^{-1}$为行满秩,且 $X_c^{-1} = T^{-\mathrm{T}}\widetilde{X}_c^{-1}T^{-1} > 0$,由式(6.4.32)和式(6.4.35)可得

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} - Y_{31} \end{bmatrix} X_c^{-1} \begin{bmatrix} I & Y_{31}^{\mathrm{T}} \\ 0 & Y_{32}^{\mathrm{T}} \\ 0 & (Y_{33} - Y_{31})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{33} \end{bmatrix} > 0 \tag{6.4.37}$$

$$[Y_{31} \quad Y_{32} \quad Y_{33} - Y_{31}]B_c = \Sigma_4$$

用如下矩阵和它的转置

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} - Y_{31} \end{bmatrix}$$

左乘和右乘式(6.4.28),并利用式(6.4.30)、(6.4.32)、(6.4.36)和式(6.4.37),即得式(6.4.18)。

证毕

由于在定理6.4.1中包含有条件(6.4.15),问题的可解性条件不是线性矩阵不等式,下面的推论将式(6.4.15)消掉,从而得到以LMI形式给出的问题的可解性条件。

【推论6.4.1】 设(B_1)~(B_3)成立,并定义

$$\hat{B}_2 = B_2(I - D_{12}^+D_{12}),\ \hat{B}_1 = B_1 - B_2D_{12}^+D_{11}D_{21}^+D_{21}$$

$$\hat{C}_2 = (I - D_{21}D_{12}^{+})C_2, \hat{C}_1 = C_1 - D_{12}D_{12}^{+}D_{11}D_{21}^{+}C_2 \tag{6.4.38}$$

(1) H_2 次优控制问题是可解的，当且仅当存在 $X = X^{\mathrm{T}}, M, Y = Y^{\mathrm{T}}, N, R, W = W^{\mathrm{T}}$，使得如下不等式成立

$$\begin{bmatrix} AX + B_2M + (AX + B_2M)^{\mathrm{T}} & (C_1X + D_{12}M)^{\mathrm{T}} \\ C_1X + D_{12}M & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{6.4.39}$$

$$\begin{bmatrix} (YA + NC_2)^{\mathrm{T}} + YA + NC_2 & (\hat{C}_1 + D_{12}R\hat{C}_2)^{\mathrm{T}} \\ \hat{C}_1 - D_{12}R\hat{C}_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{6.4.40}$$

$$\begin{bmatrix} W & (\hat{B}_1 + \hat{B}_2RD_{21})^{\mathrm{T}} & (YB_1 + ND_{21})^{\mathrm{T}} \\ \hat{B}_1 + \hat{B}_2RD_{21} & X & I \\ YB_1 + ND_{21} & I & Y \end{bmatrix} > 0 \tag{6.4.41}$$

$$\operatorname{trace} W < \gamma^2 \tag{6.4.42}$$

(2) 当条件(6.4.39)~(6.4.42)成立时，H_2 次优控制器 $K(s)$ 由式(6.4.20)和式(6.4.21)给定，其中将 $D_K = R$ 换成

$$D_K = -D_{12}^{+}D_{11}D_{21}^{+} + R - D_{12}^{+}D_{12}RD_{21}D_{21}^{+} \tag{6.4.43}$$

【证明】 根据引理 6.4.2，所有满足 $D_{11} + D_{12}RD_{21} = 0$ 的 R 由任意矩阵 S 参数化为

$$R = -D_{12}^{+}D_{11}D_{21}^{+} + S - D_{12}^{+}D_{12}SD_{21}D_{21}^{+}$$

将该式代入定理 6.4.1，基于假设(B_3)，并将 S 换成 R，即得推论的结果。 **证毕**

推论 6.4.1 以 LMI 的形式给出了 H_2 次优控制问题的可解性条件，并给出了相应的动态控制器的设计公式。与上节的 Riccati 方法相比较，LMI 方法可对 H_2 范数界 γ 进行优化。

最后，我们再对假设条件(B_3)做些讨论。式(6.4.2)中，传函阵 G_{zw} 的直接传输项为

$$D_{11} + D_{12}D_KD_{21}$$

将式(6.4.43)的 D_K 代入上式，并利用假设(B_3)，则得 G_{zw} 的直接传输项等于零，从而保证了 $\|G_{zw}\|_2$ 有限。

6.5 不确定系统的保代价控制

我们在第二章中讨论了确定性系统的线性二次型最优调节器问题。当系统模型中存在参数不确定性时，相应的线性二次型最优调节器问题称为保代价控制(Guaranteed Cost Control)问题。

本节介绍保代价控制的 Riccati 方程方法。

考虑如下不确定系统

$$\dot{x}(t) = (A + D_1\Delta(t)E_1)x(t) + (B + D_1\Delta(t)E_2)u(t) \tag{6.5.1a}$$

$$x(0) = x_0 \tag{6.5.1b}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 是状态，$u \in \mathbf{R}^p$ 是控制输入，而 $\Delta(t)$ 是满足 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t) \leqslant I$ 的时变不确定参数矩阵。与上述不确定系统相关的代价函数为

$$J = \int_0^{\infty} [x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)]\mathrm{d}t \tag{6.5.2}$$

其中加权阵 $R_1 > 0$ 和 $R_2 > 0$。

【定义 6.5.1】(保代价控制)　控制律 $u=Kx(t)$ 称为是系统(6.5.1)和代价函数(6.5.2)的具有代价矩阵 $P>0$ 的二次保代价控制，如果

$$x^{\mathrm{T}}[R_1+K^{\mathrm{T}}R_2K]x+2x^{\mathrm{T}}P[A+D_1\Delta(E_1+E_2K)+BK]x<0 \tag{6.5.3}$$

对所有非零 $x\in\mathbf{R}^n$ 和所有满足 $\Delta^{\mathrm{T}}\Delta\leqslant I$ 的 Δ 成立。

该定义与前面给出的不确定系统的二次稳定和二次镇定的定义间的关系由如下定理给出。

【定理 6.5.1】　考虑系统(6.5.1)和代价函数(6.5.2)。设控制律 $u(t)=Kx(t)$ 是二次保代价控制，则闭环不确定系统

$$\dot{x}(t)=[A+D_1\Delta(t)(E_1+E_2K)+BK]x(t),\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t)\leqslant I \tag{6.5.4}$$

是二次稳定的，而且，相应的代价函数(6.5.2)，对所有允许的不确定性 $\Delta(t)$，有界 $J\leqslant x_0^{\mathrm{T}}Px_0$。

反之，如果存在控制律 $u(t)=Kx(t)$，使得导致的闭环系统(6.5.4)是二次稳定的，则对所有正定阵 R_1 和 R_2，此控制律是具有某代价矩阵 $\widetilde{P}>0$ 的二次保代价控制。

【证明】　如果控制律 $u(t)=Kx(t)$ 是具有代价矩阵 $P>0$ 的二次保代价控制，则根据式(6.5.3)，有

$$x^{\mathrm{T}}([A+D_1\Delta(E_1+E_2K)+BK]^{\mathrm{T}}P+P[A+D_1\Delta(E_1+E_2K)+BK])x<0$$

对所有 $x\neq 0$ 和满足 $\Delta^{\mathrm{T}}\Delta\leqslant I$ 的 Δ 成立。因此，由不确定系统二次稳定的定义(定义 4.6.1)，闭环不确定系统(6.5.4)是二次稳定的。现在，定义

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$$

对于闭环系统(6.5.4)，根据式(6.5.3)，有

$$x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)\leqslant-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))$$

对上式从 0 到 ∞ 积分，得到

$$J=\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)]\mathrm{d}t\leqslant V(x_0)-V(x(\infty))$$

我们已经证明闭环系统(6.5.4)是二次稳定的，因此，$x(\infty)=0$。于是

$$J\leqslant V(x_0)=x_0^{\mathrm{T}}Px_0$$

反之，如果存在控制律 $u(t)=Kx(t)$，使得导致的闭环系统(6.5.4)是二次稳定的，则存在矩阵 $P>0$ 和常数 $\varepsilon>0$，使得

$$\varepsilon x^{\mathrm{T}}(R_1+K^{\mathrm{T}}R_2K)x+2x^{\mathrm{T}}P[A+D_1\Delta(E_1+E_2K)+BK]x<0$$

对所有非零 $x\in\mathbf{R}^n$ 和所有满足 $\Delta^{\mathrm{T}}\Delta\leqslant I$ 的 Δ 成立。于是，此控制律是具有代价矩阵 $\widetilde{P}=\frac{1}{\varepsilon}P$ 的二次保代价控制。　　证毕

现在，我们基于 Riccati 方程方法来构造二次保代价控制器。

【定理 6.5.2】　设存在常数 $\varepsilon>0$，使得 Riccati 方程

$$(A-B(\varepsilon R_2+E_2^{\mathrm{T}}E_2)^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_1)^{\mathrm{T}}P+P(A-B(\varepsilon R_2+E_2^{\mathrm{T}}E_2)^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_1)+\varepsilon PD_1D_1^{\mathrm{T}}P-$$
$$\varepsilon PB(\varepsilon R_2+E_2^{\mathrm{T}}E_2)^{-1}B^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\varepsilon}E_1^{\mathrm{T}}(I-E_2(\varepsilon R_2+E_2^{\mathrm{T}}E_2)^{-1}E_2^{\mathrm{T}})E_1+R_1=0 \tag{6.5.5}$$

具有解 $P>0$，并且考虑如下控制律

$$u(t)=-(\epsilon R_2+E_2^{\mathrm{T}}E_2)^{-1}(\epsilon B^{\mathrm{T}}P+E_2^{\mathrm{T}}E_1)x(t) \tag{6.5.6}$$

则给定任意 $\delta>0$，存在矩阵 $\widetilde{P}>0$，使得 $P<\widetilde{P}<P+\delta I$，且式(6.5.6)是系统(6.5.1)的具有代价矩阵 $\widetilde{P}$ 的二次保代价控制。

反之，给定任意具有代价矩阵 $\widetilde{P}>0$ 的二次保代价控制，存在常数 $\epsilon>0$，使得 Riccati 方程(6.5.5)具有稳定解 $P^{+}>0$，其中 $P^{+}<\widetilde{P}$。

【证明】 为了证明定理的第一部分，令控制律 $u(t)=Kx(t)$ 由式(6.5.5)和式(6.5.6)定义。如果我们定义

$$\overline{A}=A+BK,\widetilde{R}_2=\epsilon R_2+E_2^{\mathrm{T}}E_2$$

则根据式(6.5.5)，有

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}P+P\overline{A}+\epsilon PB\widetilde{R}_2^{-1}B^{\mathrm{T}}P+\epsilon PD_1D_1^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\epsilon}E_1^{\mathrm{T}}(I-E_2\widetilde{R}_2^{-1}E_2^{\mathrm{T}})E_1+R_1=0$$

经代数运算，可以证明上述方程等价于 Riccati 方程

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}P+P\overline{A}+\epsilon PD_1D_1^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\epsilon}\overline{E}^{\mathrm{T}}\overline{E}+\overline{R}=0$$

其中 $\overline{E}=E_1+E_2K,\overline{R}=R_1+K^{\mathrm{T}}R_2K$。

令 $\hat{P}=\epsilon P$，则 $\hat{P}$ 满足 Riccati 方程

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}\hat{P}+\hat{P}\overline{A}+\hat{P}D_1D_1^{\mathrm{T}}\hat{P}+\overline{E}^{\mathrm{T}}\overline{E}+\epsilon\overline{R}=0$$

因此，给定任意常数 $\epsilon_1\in(0,\epsilon)$，有

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}\hat{P}+\hat{P}\overline{A}+\hat{P}D_1D_1^{\mathrm{T}}\hat{P}+\overline{E}^{\mathrm{T}}\overline{E}+\epsilon_1\overline{R}<0 \tag{6.5.7}$$

现在，给定任意 $\delta>0$，选择 $\epsilon_1\in(0,\epsilon)$，使得矩阵 $\widetilde{P}=\frac{\epsilon}{\epsilon_1}P=\frac{1}{\epsilon_1}\hat{P}>P$ 满足 $\widetilde{P}<P+\delta I$。根据式(6.5.7)，$\widetilde{P}$ 满足如下不等式

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}\widetilde{P}+\widetilde{P}\overline{A}+\epsilon_1\widetilde{P}D_1D_1^{\mathrm{T}}\widetilde{P}+\frac{1}{\epsilon_1}\overline{E}^{\mathrm{T}}\overline{E}+\overline{R}<0 \tag{6.5.8}$$

我们将利用二次矩阵不等式(6.5.8)建立式(6.5.3)。事实上，给定任意允许的不确定矩阵 Δ，根据式(6.5.8)和引理5.6.1(1)，可得

$$(\overline{A}+D_1\Delta\overline{E})^{\mathrm{T}}\widetilde{P}+\widetilde{P}(\overline{A}+D_1\Delta\overline{E})+\overline{R}\leqslant\overline{A}^{\mathrm{T}}\widetilde{P}+\widetilde{P}A+\epsilon_1\widetilde{P}D_1D_1^{\mathrm{T}}\widetilde{P}+\frac{1}{\epsilon}\overline{E}^{\mathrm{T}}\overline{E}+\overline{R}<0$$

这就完成了定理第一部分的证明。

定理第二部分的证明可参阅文献[89]，此处从略。 **证毕**

综合以上定理和定理6.5.1，我们看到，如果 Riccati 方程(6.5.5)有解 $P>0$，则控制律(6.5.6)所导致的闭环不确定系统(6.5.4)是二次稳定的，并且代价函数(6.5.2)的闭环值，对所有 $x_0\in R^n$ 和所有允许的不确定性 $\Delta(t)$，有界 $J\leqslant x_0^{\mathrm{T}}Px$。

关于 Riccati 方程(6.5.5)中最优参数 ϵ 的选择，有类似于定理4.3.12的结果，具体可见文献[89]的定理3.2。

6.6 不确定时滞系统的保代价控制

本节将上节研究的不确定系统的保代价控制推广到不确定时滞系统，并且在处理问题的方法上采用 LMI 技术，以克服 Riccati 方法难于对代价函数的上界进行优化和其它一些缺点[90]。

考虑如下不确定状态时滞系统

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [A_1 + \Delta A_1(t)]x(t-d) + [B + \Delta B(t)]u(t) \quad (6.6.1a)$$

$$x(t) = \phi(t), t \in [-d, 0] \quad (6.6.1b)$$

设参数不确定性是范数有界的，且具有如下形式

$$[\Delta A \quad \Delta B \quad \Delta A_1] = DF(t)[E_1 \quad E_2 \quad E_d] \quad (6.6.2)$$

其中 D、E_1、E_2 和 E_d 是具有适当维数的已知常数阵，代表不确定性的结构，$F(t) \in \mathbf{R}^{i \times j}$是未知矩阵函数，其元素 Lebesgue 可测，且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I \quad (6.6.3)$$

与系统(6.6.1)相关的代价函数为

$$J = \int_0^{\infty} [x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t \quad (6.6.4)$$

其中 Q 和 R 是已知正定对称阵。

【定义 6.6.1】(保代价控制)　考虑不确定时滞系统(6.6.1)，如果存在控制律 $u^*(t)$和正标量 J^*，使得对所有允许的不确定性，闭环系统是稳定的，且代价函数(6.6.4)的闭环值满足 $J \leqslant J^*$，则称 J^* 是一个保代价，而称 $u^*(t)$是不确定时滞系统(6.6.1)的保代价控制律。

下面，讨论不确定时滞系统(6.6.1)的无记忆状态反馈保代价控制律 $u(t) = Kx(t)$的设计问题。首先给出不确定时滞系统(6.6.1)无记忆状态反馈保代价控制律存在的一个充分条件。

【定理 6.6.1】　$u(t) = Kx(t)$是一个保代价控制律，如果存在正定对称阵 $P, S \in \mathbf{R}^{n \times n}$，使得对所有满足式(6.6.3)的不确定矩阵 F，有

$$\begin{bmatrix} \Sigma & P(A_1 + DFE_d) \\ (A + DFE_d)^{\mathrm{T}}P & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (6.6.5)$$

其中

$$\Sigma = Q + K^{\mathrm{T}}RK + S + P[A + BK + DF(E_1 + E_2K)] + [A + BK + DF(E_1 + E_2K)]^{\mathrm{T}}P \quad (6.6.6)$$

【证明】　将 $u(t) = Kx(t)$代入方程(6.6.1)，得闭环系统为

$$\dot{x}(t) = [A + BK + DF(E_1 + E_2K)x(t) + (A_1 + DFE_d)x(t-d)] \quad (6.6.7)$$

设存在对称阵 $P > 0, S > 0$，使得矩阵不等式(6.6.5)对所有允许的不确定性成立。定义

$$V(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-a}^{t} x^{\mathrm{T}}(\tau)Sx(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (6.6.8)$$

则 $V(\cdot)$沿闭环系统(6.6.7)的任意解轨迹的导数为

$$L(x_t, t) = 2x^{\mathrm{T}}(t)P[A + BK + DF(E_1 + E_2K)]x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)P(A_1 + DFE_d)x(t-d) + x^{\mathrm{T}}(t)Sx(t) - x^{\mathrm{T}}(t-d)Sx(t-d) =$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \Sigma - Q - K^{\mathrm{T}}RK & P(A_1 + DFE_d) \\ (A_1 + DFE_d)^{\mathrm{T}}P & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 由方程(6.6.6)给定。不等式(6.6.5)隐含

$$L(x_t, t) < x^{\mathrm{T}}(t)(-Q - K^{\mathrm{T}}RK)x(t) < 0 \tag{6.6.9}$$

因此,由 Lyapunov 稳定性理论,闭环系统(6.6.7)是渐近稳定的。对式(6.6.9)两端从 0 到 T 积分,我们得到

$$-\int_0^T x^{\mathrm{T}}(t)(Q + K^{\mathrm{T}}RK)x(t)\mathrm{d}t > x^{\mathrm{T}}(T)Px(T) - x^{\mathrm{T}}(0)Px(0) + \int_{T-d}^{T} x^{\mathrm{T}}(\tau)Sx(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_{-d}^{0} x^{\mathrm{T}}(\tau)Sx(\tau)\mathrm{d}\tau$$

由于闭环系统(6.6.7)是渐近稳定的,当 $T\to\infty$ 时

$$x^{\mathrm{T}}(T)Px(T)\to 0$$

$$\int_{T-d}^{T} x^{\mathrm{T}}(\tau)Sx(\tau)\mathrm{d}\tau\to 0$$

因此,利用初始条件(6.6.1b),我们得到

$$\int_0^\infty x^{\mathrm{T}}(t)(Q + K^{\mathrm{T}}RK)x(t)\mathrm{d}t \leqslant \phi^{\mathrm{T}}(0)P\phi(0) + \int_{-d}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\tau)S\phi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.6.10}$$

取

$$J^* = \phi^{\mathrm{T}}(0)P\phi(0) + \int_{-d}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\tau)S\phi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

则由定义 6.6.1,定理的结论成立。 **证毕**

下面证明上述定理给出的保代价控制器存在的充分条件等价于 LMI 的可解性。我们需要如下引理。

【引理 6.6.1】[51] 给定具有适当维数的矩阵 Q、H、E 和 R,其中 Q 和 R 对称且 $R>0$,则

$$Q + HFE + E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} < 0$$

对所有满足 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant R$ 的 F 成立,当且仅当存在 $\varepsilon>0$,使得

$$Q + \varepsilon^2 HH^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-2}E^{\mathrm{T}}RE < 0$$

【定理 6.6.2】 对系统(6.6.1),存在正定对称阵 P、S,使得矩阵不等式(6.6.5)成立,当且仅当存在标量 $\varepsilon>0$,矩阵 $W\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 和正定对称阵 $X, V\in\mathbf{R}^{n\times n}$,使得如下 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A} & A_1V & (E_1X + E_2W)^{\mathrm{T}} & X & W^{\mathrm{T}} & X \\ VA_1^{\mathrm{T}} & -V & VE_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ E_1X + E_2W & E_dV & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & -V \end{bmatrix} < 0 \tag{6.6.11}$$

其中 $\widetilde{A} = AX + BW + (AX + BW)^{\mathrm{T}} + \varepsilon DD^{\mathrm{T}}$。而且,如果不等式(6.6.11)具有可行解 ε, W, $X>0$, $V>0$,则状态反馈控制律

$$u^*(t) = WX^{-1}x(t) \tag{6.6.12}$$

是保代价控制律,而

$$J^* = \phi^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}\phi(0) + \int_{-d}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\tau)V^{-1}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.6.13}$$

是不确定时滞系统(6.6.1)的一个保代价。

【证明】 定义

$$Y=\begin{bmatrix} Q+K^{\mathrm{T}}RK+S+P(A+BK)+(A+BK)^{\mathrm{T}}P & PA_1 \\ A_1^{\mathrm{T}}P & -S \end{bmatrix}$$

则不等式(6.6.5)等价于

$$Y+\begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix}F[E_1+E_2K \quad E_d]+[E_1+E_2K \quad E_d^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}<0$$

根据引理 6.6.1,上述矩阵不等式对所有满足 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$ 的 F 成立,当且仅当存在常数 $\varepsilon>0$,使得

$$Y+\varepsilon\begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}[E_1+E_2K \quad E_d]^{\mathrm{T}}[E_1+E_2K \quad E_d]<0$$

即

$$\begin{bmatrix} \Omega & PA_1+\varepsilon^{-1}(E_1+E_2K)^{\mathrm{T}}E_d \\ A_1^{\mathrm{T}}P+\varepsilon^{-1}E_d^{\mathrm{T}}(E_1+E_2K) & -S+\varepsilon^{-1}E_d^{\mathrm{T}}E_d \end{bmatrix}<0 \qquad (6.4.14)$$

其中

$$\Omega=Q+K^{\mathrm{T}}RK+S+P(A+BK)+(A+BK)^{\mathrm{T}}P+\varepsilon PDD^{\mathrm{T}}P+\varepsilon^{-1}(E_1+E_2K)^{\mathrm{T}}(E_1+E_2K)$$

由 Schur 补引理,不等式(6.6.14)等价于

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & PA_1 & (E_1+E_2K)^{\mathrm{T}} & I & K^{\mathrm{T}} & I \\ A_1^{\mathrm{T}}P & -S & E_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ E_1+E_2K & E_d & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -S^{-1} \end{bmatrix}<0 \qquad (6.4.15)$$

其中

$$\hat{A}=P(A+BK)+(A+BK)^{\mathrm{T}}P+\varepsilon PDD^{\mathrm{T}}P$$

用下式左乘和右乘不等式(6.6.15)的两端

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

并记 $X=P^{-1}>0$, $W=KP^{-1}$, $V=S^{-1}>0$,即得不等式(6.6.11)。从上述证明过程,可以看出,定理的其余部分成立。 **证毕**

由于不等式(6.6.11)关于 ε、W、X 和 V 是线性的,它定义了一个(ε, W, X, V)的凸解集合。因此,各种凸优化算法都能用来检验 LMI 是否可解,并得到相应的解。下面的定理给出了通过求解一个优化问题来确定极小化闭环不确定系统的代价函数的保代价控制律。

【定理 6.6.3】 考虑系统(6.6.1)和代价函数(6.6.4),如果下列优化问题

$$\min_{\varepsilon,\alpha,W,N,M} \alpha + \mathrm{trace}(M) \tag{6.6.16}$$

(1) 式(6.6.11)成立;

(2) $\begin{bmatrix} -\alpha & \phi^{\mathrm{T}}(0) \\ \phi(0) & -X \end{bmatrix} < 0$;

(3) $\begin{bmatrix} -M & N^{\mathrm{T}} \\ N & -V \end{bmatrix} < 0$

有解 ε、α、W、X、V、M,其中 $\int_{-d}^{0} \phi(\tau)\phi^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau = NN^{\mathrm{T}}$,则式(6.6.12)的控制律是一个无记忆状态反馈保代价控制律,它使得不确定时滞系统(6.6.1)的代价函数的极小值为(6.6.13)。

【证明】 根据定理 6.6.2,由任意可行解 ε、α、W、X、V 和 M 所构造的控制律(6.6.12)是系统(6.6.1)的一个保代价控制律。

由 Schur 补引理可知,式(6.6.16)中的(2)等价于

$$\phi^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}\phi(0) < \alpha$$

式(6.6.16)中的(3)等价于

$$N^{\mathrm{T}}V^{-1}N < M$$

另一方面

$$\int_{-d}^{0} \phi^{\mathrm{T}}(\tau)V^{-1}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-d}^{0} \mathrm{trace}(\phi^{\mathrm{T}}(\tau)V^{-1}\phi(\tau))\mathrm{d}\tau = \mathrm{trace}(NN^{\mathrm{T}}V^{-1}) =$$
$$\mathrm{trace}(N^{\mathrm{T}}V^{-1}N) < \mathrm{trace}(M)$$

所以,由方程(6.6.13),有

$$J^* < \alpha + \mathrm{trace}(M)$$

于是,极小化 $\alpha + \mathrm{trace}(M)$ 隐含极小化不确定系统(6.6.1)的代价函数。而式(6.6.16)中,目标函数和约束条件的凸性,保证了该优化问题解的最优性。 **证毕**

【例 6.6.1】 考虑如下不确定时滞系统

$$\dot{x}(t) = (A + rA_0)x(t) + (A_1 + sA_{11})x(t-1) + (B + qB_1)u(t) \tag{6.6.17}$$

性能指标由式(6.6.4)给定,其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$|r| \leqslant 0.1$, $|s| \leqslant 0.1$, $|q| \leqslant 0.1$, $Q = I$, $R = 1$, $x_1(t) = \mathrm{e}^{t+1}$, $x_2(t) = 0$, $t \in [-1 \quad 0]$。定义

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, F = 10 \times \mathrm{diag}\{r, s, q\}$$

则系统(6.6.17)可以改写为

$$\dot{x}(t) = (A + DFE_1)x(t) + (A_1 + DFE_d)x(t-d) + (B + DFE_2)u(t)$$

应用定理 6.6.3,求解相应的优化问题,我们得到无记忆状态反馈保代价控制律

$$u^*(t) = -[1.004\,6 \quad 3.340\,8]x(t)$$

不确定闭环系统的代价函数的极小值为 $J^* = 45.443\,7$。

第七章　H_2/H_∞混合控制

我们在第二章和第六章讨论了 H_2 最优(次优)控制问题,在第四章讨论了 H_∞ 次优控制问题。H_2 最优控制和 H_∞ 优化控制理论的提出是现代控制理论发展中的两个重大突破。根据第二章对线性二次型性能指标工程意义的讨论,我们看到,H_2 最优控制的控制系统具有较好的系统性能和其它一些优良特性,但它对被控对象的模型摄动产生的不确定性不具鲁棒性(见例4.1.1的分析)。而 H_∞ 控制理论虽然能较好地解决系统的鲁棒性问题,但这是以牺牲系统的其它性能为代价的。鉴于此,Bernstein 等在文献[55]中提出了 H_2/H_∞ 混合控制的设计思想。由于这一方法能较好地解决系统的鲁棒性和系统性能问题,因而一提出就得到广泛关注,并取得了很大发展。文献[91]、[92]中提出了求解 H_2/H_∞ 混合控制问题的诱导范数方法。文献[93]给出了一种凸优化解法,克服了文献[55]、[91]、[92]中必须求解耦合的 Riccati 方程的缺点。文献[95]得到了基于 LMI 的一类 H_2/H_∞ 混合控制问题降阶控制器的设计方法,文献[96]讨论了 H_2/H_∞ 混合控制的极点配置问题,而在文献[94]中,给出了一种 H_2/H_∞ 混合控制问题的参数化求解算法。

本章的目的在于向读者介绍有关 H_2/H_∞ 混合控制问题的一些基本概念和一些具体求解方法,为深入研究这一问题打下一定的基础。

7.1　问题的提出

我们在 2.8.2 小节讨论了状态反馈稳态 LQG 问题,其解由两个代数 Riccati 方程的正定解给出。本节我们将讨论较一般的输出反馈动态控制器所对应的稳态 LQG 问题,并附加 H_∞ 范数界的限制,从而引出 H_2/H_∞ 混合控制设计的基本概念。

考虑如下 n 阶能稳定、能检测的被控对象的状态空间描述

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \tag{7.1.1a}$$

$$z_1(t) = C_1x(t) + D_1u(t) \tag{7.1.1b}$$

$$y(t) = C_2x(t) + D_2w(t) \tag{7.1.1c}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$ 是状态,$u\in\mathbf{R}^p$ 是控制,$z_1\in\mathbf{R}^{m_1}$是被控输出,$y\in\mathbf{R}^q$ 是量测输出,$w\in\mathbf{R}^r$ 是标准白噪声。并假设 $C_1^{\mathrm{T}}D_1=0$ 和 $B_1B_1^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,$D_2D_2^{\mathrm{T}}>0$,且 $B_1D_2^{\mathrm{T}}=0$,即过程噪声与量测(传感)噪声是不相关的。

所要设计的 n_c 阶($n_c\leqslant n$)输出反馈动态控制器取如下形式

$$\dot{x}_c(t) = A_cx_c(t) + B_cy(t) \tag{7.1.2a}$$

$$u(t) = C_cx_c(t) \tag{7.1.2b}$$

其中 x_c 是控制器状态。由式(7.1.2)和式(7.1.1)构成的闭环系统为

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}w(t) \tag{7.1.3a}$$

$$z_1(t) = \tilde{C}_1\tilde{x}(t) \tag{7.1.3b}$$

其中

$$\widetilde{x}=\begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix},\widetilde{A}=\begin{bmatrix} A & B_2C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{bmatrix},\widetilde{B}=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_cD_2 \end{bmatrix},\widetilde{C}_1=[C_1 \quad D_1C_c]$$

现在，我们给出 H_2/H_∞ 混合控制的定义。

【问题 7.1.1】 对于被控系统(7.1.1)，设计输出反馈动态控制器(7.1.2)，满足如下设计准则：

(1) 闭环系统(7.1.3)是渐近稳定的，即 $\widetilde{A}$ 是渐近稳定的。

(2) 从 w 到 z_1 的闭环传函阵

$$G_{z_1w}(s) = \widetilde{C}_1(sI - \widetilde{A})^{-1}\widetilde{B} \tag{7.1.4}$$

满足

$$\| G_{z_1w}(s) \|_\infty \leqslant \gamma \tag{7.1.5}$$

其中 $\gamma > 0$ 是一给定常数。

(3) 二次型性能指标泛函(价值率函数)

$$J(A_c,B_c,C_c) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\left\{\int_0^t [x^T(s)R_1x(s) + u^T(s)R_2u(s)]ds\right\} \tag{7.1.6}$$

达极小值，其中加权矩阵

$$R_1 = C_0^TC_0 \geqslant 0, R_2 = D_0^TD_0 > 0 \tag{7.1.7}$$

注 由于假设了(A,B_2,C_2)能稳定、能检测，n_c 阶控制器的集合是非空的。

下面，我们对 LQG 问题的性能指标(7.1.6)做些讨论。可以证明，性能指标(7.1.6)等价于

$$J(A_c,B_c,C_c) = \lim_{t\to\infty} E[x^T(t)R_1x(t) + u^T(t)R_2u(t)] \tag{7.1.8}$$

将式(7.1.2b)的 $u(t)$ 和式(7.1.7)的加权矩阵分解式代入上式，得

$$J(A_c,B_c,C_c) = \lim_{t\to\infty} E[x^T(t)C_0^TC_0x(t) + x_c^T(t)C_c^TD_0^TD_0C_cx_c(t)] = \lim_{t\to\infty} E[\widetilde{x}^T(t)\widetilde{R}\widetilde{x}(t)] \tag{7.1.9}$$

其中

$$\widetilde{R}=\begin{bmatrix} C_0^TC_0 & 0 \\ 0 & C_c^TD_0^TD_0C_c \end{bmatrix}$$

由加权矩阵的分解式(7.1.7)，定义辅助被控输出信号

$$z_0(t) = C_0x(t) + D_0u(t) \tag{7.1.10}$$

其中 $z_0\in \mathbf{R}^{m_0}$。并假设 $C_0^TD_0=0$，则性能指标(7.1.6)等价于

$$J(A_c,B_c,C_c) = \lim_{t\to\infty}E[z_0^T(t)z_0(t)] \tag{7.1.11}$$

实际上，当干扰 w 为零均值，单位方差高斯白噪声信号时，可以证明 LQG 问题的性能指标(7.1.6)(式(7.1.11))即为从 w 到 z_0 的闭环传函阵 $G_{z_0w}(s)$ 的 H_2 范数

$$\| G_{z_0w}(s) \|_2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{trace}[G_{z_0w}(j\omega)G_{z_0w}^*(j\omega)]d\omega\right\}^{\frac{1}{2}}$$

这样，如果对于给定的控制器(A_c,B_c,C_c)，$\widetilde{A}$ 是渐近稳定的，则性能指标(7.1.9)可写为

$$J(A_c,B_c,C_c) = \lim_{t\to\infty} E[\widetilde{x}^T(t)\widetilde{R}\widetilde{x}(t)] = \mathrm{trace}\{\lim_{t\to\infty} E[\widetilde{x}^T(t)\widetilde{R}\widetilde{x}(t)]\} =$$

$$\text{trace } \widetilde{Q}\widetilde{R} = \text{trace } \widetilde{C}_0\widetilde{Q}\widetilde{C}_0^{\mathrm{T}} \tag{7.1.12}$$

其中 $\widetilde{C}_0 = [C_0 \quad D_0 C_c]$，并且根据式(6.2.11)，由下式定义的稳态闭环状态协方差阵

$$\widetilde{Q} = \lim_{t \to \infty} E[\widetilde{x}(t)\widetilde{x}^{\mathrm{T}}(t)] \tag{7.1.13}$$

满足如下 Lyapunov 方程

$$\widetilde{A}\widetilde{Q} + \widetilde{Q}\widetilde{A}^{\mathrm{T}} + \widetilde{B}\widetilde{B}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{7.1.14}$$

$$\widetilde{Q} = \int_0^{\infty} e^{\widetilde{A}t}\widetilde{B}\widetilde{B}^{\mathrm{T}} e^{\widetilde{A}^{\mathrm{T}}t} \mathrm{d}t$$

以上我们对问题 7.1.1 中的 LQG 问题性能指标(7.1.6)做了讨论，指出性能指标(7.1.6)就是闭环系统从 w 到 z_0 的传函阵的 H_2 范数。然后，根据 H_2 范数的计算公式(6.2.11)，推得了稳态闭环状态协方差阵(7.1.13)满足 Lyapunov 方程(7.1.14)。

在稳态 LQG 问题性能指标(7.1.6)的基础上，再附加 H_∞ 范数界(7.1.5)（即 H_2/H_∞ 混合控制）的关键步骤是将 Lyapunov 方程(7.1.14)换成 Riccati 方程。下面的定理给出了这样的结果。

【定理 7.1.1】 给定(A_c, B_c, C_c)。假设存在 $Q' \geqslant 0$ 满足 Riccati 方程

$$\widetilde{A}Q' + Q'\widetilde{A}^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2} Q'\widetilde{C}_1^{\mathrm{T}}\widetilde{C}_1 Q' + \widetilde{B}\widetilde{B}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{7.1.15}$$

则$(\widetilde{A}, \widetilde{B})$能稳定，当且仅当 $\widetilde{A}$ 是渐近稳定的。如果上述条件成立，则

$$\| G_{z_1 w(s)} \|_\infty \leqslant \gamma \tag{7.1.16}$$

且

$$\widetilde{Q} \leqslant Q' \tag{7.1.17}$$

因此

$$J(A_c, B_c, C_c) \leqslant J(A_c, B_c, C_c, Q') \tag{7.1.18}$$

其中

$$J(A_c, B_c, C_c, Q') = \text{trace } Q'\widetilde{R} \tag{7.1.19}$$

该定理的证明可参阅文献[55]。

注 根据能稳定性的定义(见附录)，定理中条件$(\widetilde{A}, \widetilde{B})$能稳定，意味着闭环系统不具有不受扰动的不稳定模态。

定理 7.1.1 说明，当 Riccati 方程(7.1.15)存在非负定解 Q'，且 $\widetilde{A}$ 渐近稳定时，H_∞ 范数界(7.1.16)成立。而且，所有这样的解 Q' 给出了稳态闭环状态协方差阵 $\widetilde{Q}$ 的一个上界，也即(7.1.19)给出了 L_2 性能指标 $J(A_c, B_c, C_c)$的一个上界。这样，根据定理 7.1.1，我们就得到求解问题 7.1.1 的一种数学规划方法。

【问题 7.1.2】 在式(7.1.15)的约束下，确定参数(A_c, B_c, C_c, Q')，使式(7.1.19)的性能指标 $J(A_c, B_c, C_c, Q')$达极小值。

上述优化问题在文献[55]中，被称为辅助优化问题，相应地，称性能指标 $J(A_c, B_c, C_c, Q')$为辅助性能指标。

我们在下一节将给出问题 7.1.2 求解的 Riccati 方法。

最后，根据上面的讨论，我们将方程(7.1.1)和(7.1.10)两式合写在一起，就得到如下广义被控对象的状态空间描述

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \tag{7.1.20a}$$

$$z_0(t) = C_0 x(t) + D_0 u(t) \tag{7.1.20b}$$

$$z_1(t) = C_1 x(t) + D_1 u(t) \tag{7.1.20c}$$

$$y(t) = C_2 x(t) + D_2 w(t) \tag{7.1.20d}$$

问题 7.1.1 提出的 H_2/H_∞ 混合控制器设计问题就可转化为图 7.1.1所示的 H_2/H_∞ 混合标准控制问题。图中广义被控对象 G 的状态空间实现为式(7.1.20)，待设计的控制器 K 如式(7.1.2)。问题 7.1.1 可等价地表述为：

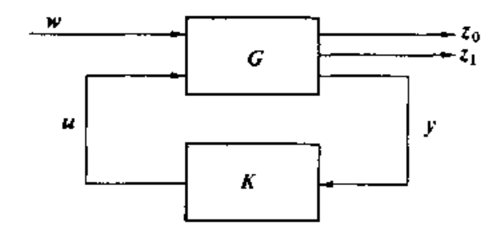


图 7.1.1 H_2/H_∞ 混合标准控制

【问题 7.1.3】 对于广义被控对象(7.1.20)，设计输出反馈动态控制器(7.1.2)，满足如下设计准则：

(1) 图 7.1.1 所示闭环系统内稳定；

(2) 闭环传函阵 $G_{z_1 w}(s)$ 满足

$$\| G_{z_1 w}(s) \|_\infty \leqslant \gamma$$

(3) 闭环传函阵 $G_{z_0 w}(s)$ 满足

$$\min_K \| G_{z_0 w}(s) \|_2$$

相应的控制器 K，称为 H_2/H_∞ 混合最优控制器。

7.2 H_2/H_∞ 混合控制的 Riccati 方法

现在，我们讨论辅助性能指标(7.1.19)的极小化问题，即求解问题 7.1.2 给出的辅助优化问题。所采用的方法为代数 Riccati 方程方法。下述定理给出了问题 7.1.2 可解的一个充分条件和相应的控制器设计公式。先引进如下记号：$R_{1\infty} = C_1^{\mathrm{T}} C_1$，$R_{2\infty} = D_1^{\mathrm{T}} D_1$，并设 $R_{2\infty} = \beta R_2$，其中 $\beta \geqslant 0$ 表示 H_2(LQG)加权阵 R_2 与 H_∞ 加权阵 $R_{2\infty}$ 是相关的($\beta > 0$)或不相关的($\beta = 0$)。对任意 $\hat{Q} \geqslant 0, P \geqslant 0$，定义 $S = (I + \beta^2 \gamma^{-2} \hat{Q} P)^{-1}$，$V_2 = D_2 D_2^{\mathrm{T}}$，根据 7.1 节的假定，$V_2 > 0$。令 $n_c = n$，即考虑全阶控制器设计问题。

【定理 7.2.1】 设存在非负定矩阵 Q、P、$\hat{Q}$ 满足如下 Riccati 方程

$$AQ + QA^{\mathrm{T}} + B_1 B_1^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2} Q R_{1\infty} Q - Q C_2 V_2^{-1} C_2^{\mathrm{T}} Q = 0 \tag{7.2.1}$$

$$[A + \gamma^{-2}(Q + \hat{Q}) R_{1\infty}]^{\mathrm{T}} P + P[A + \gamma^{-2}(Q + \hat{Q}) R_{1\infty}] + R_1 - S^{\mathrm{T}} P B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} P S = 0 \tag{7.2.2}$$

$$\begin{aligned}&[A - B_2 R_2^{-1} PS + \gamma^{-2} Q R_{1\infty}]\hat{Q} + \hat{Q}[A - B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} PS + \gamma^{-2} Q R_{1\infty}]^{\mathrm{T}} + \\ &\gamma^{-2} \hat{Q}[R_{1\infty} + \beta^2 S^{\mathrm{T}} P B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} PS]\hat{Q} + \hat{Q} C_2 V_2^{-1} C_2^{\mathrm{T}} Q = 0\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

并令控制器参数(A_c, B_c, C_c, Q')由下式给定

$$A_c = A - Q C_2 V_2^{-1} C_2^{\mathrm{T}} - B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} PS + \gamma^{-2} Q R_{1\infty} \tag{7.2.4}$$

$$B_c = QC_2^{\mathrm{T}} V_2^{-1} \tag{7.2.5}$$

$$C_c = -R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} PS \tag{7.2.6}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} Q + \hat{Q} & \hat{Q} \\ \hat{Q} & \hat{Q} \end{bmatrix} \tag{7.2.7}$$

则$(\tilde{A},\tilde{B})$是能稳定的，当且仅当 $\tilde{A}$ 是渐近稳定的。如果上述条件成立，则闭环传函阵 $\mathbf{G}_{z_1 w}$满足 H_∞范数界约束

$$\| \mathbf{G}_{z_1 w}(s) \|_\infty \leqslant \gamma \tag{7.2.8}$$

并且，辅助性能指标(7.1.19)由下式给定

$$J(A_c, B_c, C_c, Q') = \mathrm{trace}[(Q + \hat{Q}) R_1 + \hat{Q} S^{\mathrm{T}} P B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} PS] \tag{7.2.9}$$

即 L_2 性能指标(7.1.6)有上界

$$J(A_c, B_c, C_c) = \mathrm{trace}[(Q + \hat{Q}) R_1 + \hat{Q} S^{\mathrm{T}} P B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} PS] \tag{7.2.10}$$

我们注意到，上述定理中三个 Riccati 方程中的后两个方程(7.2.2)和(7.2.3)是相互耦合的，必须同时求解。耦合的 Riccati 方程难于计算求解(具体解法可见文献[97])。因此，这里我们对定理 7.2.1 的结果，仅是作为一种方法介绍给读者，而没有给出证明(证明可参阅文献[55])。下面我们重点讨论定理 7.2.1 给出的结果与 2.7 节的稳态 LQG 问题的解的关系。

置 $\beta = 0$，或等价地，$D_1 = 0(R_{2\infty} = 0)$。此时，$S = I$，Q' 由式(7.2.7)给定，且式(7.2.4)～(7.2.6)成为

$$A_c = A - QC_2 V_2^{-1} C_2^{\mathrm{T}} - B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} P + \gamma^{-2} Q R_{1\infty} \tag{7.2.11}$$

$$B_c = QC_2^{\mathrm{T}} V_2^{-1} \tag{7.2.12}$$

$$C_c = -R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} P \tag{7.2.13}$$

其中 Q 满足式(7.2.1)，而式(7.2.2)和式(7.2.3)成为

$$[A + \gamma^{-2}(Q + \hat{Q}) R_{1\infty}]^{\mathrm{T}} P + P[A + \gamma^{-2}(Q + \hat{Q}) R_{1\infty}] + R_1 - P B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} P = 0 \tag{7.2.14}$$

$$(A - B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} P + \gamma^{-2} Q R_{1\infty}) \hat{Q} + \hat{Q} (A - B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} P + \gamma^{-2} Q R_{1\infty})^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2} \hat{Q} R_{1\infty} \hat{Q} + Q C_2 V_2^{-1} C_2^{\mathrm{T}} Q = 0 \tag{7.2.15}$$

最后，辅助性能指标(7.2.9)简化为

$$J(A_c, B_c, C_c, Q') = \mathrm{trace}[(Q + \hat{Q}) R_1 + \hat{Q} P B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} P] \tag{7.2.16}$$

如果 $D_1 = 0(\beta = 0)$和 $C_1 = 0(R_{1\infty} = 0)$同时成立，相当于式(7.1.20c)的 $z_1(t) = 0$，则式(7.2.1)和式(7.2.14)成为

$$AQ + QA^{\mathrm{T}} + B_1 B_1^{\mathrm{T}} - QC_2 V_2^{-1} C_2^{\mathrm{T}} Q = 0 \tag{7.2.17}$$

$$A^{\mathrm{T}} P + PA + R_1 - P B_2 R_2^{-1} B_2^{\mathrm{T}} P = 0 \tag{7.2.18}$$

上两式即为 2.8 节 LQG 问题中的式(2.8.27)和式(2.8.26)。也就是说，H_2/H_∞混合控制问题退化为 LQG 问题。此时，方程(7.2.14)、(7.2.15)是解耦的，方程(7.2.15)成为多余的。上述结果也可以令 Riccati 方程(7.2.1)、(7.2.14)中的 H_∞范数界 $\gamma \to \infty$而得到。

以上给出的结果是 $n_c = n$ 的情况，即全阶 H_2/H_∞混合控制器存在的充分条件和设计公式。$n_c < n$ 的情况，即降阶控制器设计问题的结果是类似的，但要复杂一些。详见文献[55]中的定理 6.1。

7.3 H_2/H_∞混合控制的凸优化方法

7.3.1 再论 H_2/H_∞混合性能指标

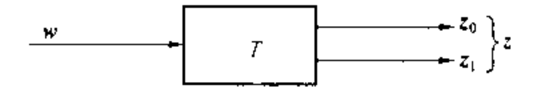


图 7.3.1 H_2/H_∞混合性能指标

首先,我们再对 H_2/H_∞混合控制问题的性能指标做些讨论,以加深对问题的认识。考虑图 7.3.1所示有限维线性时不变系统 T。w 为外部干扰输入信号,z_0、z_1 为评价信号。设 T 是内稳定的,且由如下状态空间模型描述

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \tag{7.3.1a}$$

$$z_0(t) = C_0x(t) + D_0w(t) \tag{7.3.1b}$$

$$z_1(t) = C_1x(t) + D_1w(t) \tag{7.3.1c}$$

其中 A、B、C_0、D_0、C_1 和 D_1 是具有适当维数的实矩阵,且 A 稳定。令

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} T_{z_0w} \\ T_{z_1w} \end{bmatrix}$$

表示从 w 到 z 的传函阵。如前所述 $\| T_{z_0w} \|_2 < \infty$,当且仅当 $D_0 = 0$。此时,如果能控性 Gramian 阵 L_c 满足 Lyapunov 方程

$$AL_c + L_cA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} = 0 \tag{7.3.2}$$

则

$$\| T_{z_0w} \|_2^2 = \mathrm{trace}(C_0L_cC_0^{\mathrm{T}})$$

【引理 7.3.1】 给定 $\gamma > 0$。设 $\bar{\sigma}(D_1) < \gamma$,且 A 为稳定阵,则 $\| T_{z_1w}(s) \|_\infty < \gamma$ 的充分必要条件是 Riccati 方程

$$R(Y) = AY + YA^{\mathrm{T}} + (YC_1^{\mathrm{T}} + BD_1^{\mathrm{T}})M^{-1}(C_1Y + D_1B^{\mathrm{T}}) + BB^{\mathrm{T}} = 0 \tag{7.3.3}$$

具有(惟一)实对称解 Y,且 $A + (YC_1^{\mathrm{T}} + BD_1^{\mathrm{T}})M^{-1}C_1$ 是渐近稳定的。其中 $M = \gamma^2I - D_1D_1^{\mathrm{T}} > 0$。

引理 7.3.1 与定理 4.3.8 相仿,具体可见文献[41]。而且式(7.3.3)的解 Y 满足[93]

$$0 \leqslant L_c \leqslant Y \leqslant \hat{Y} \tag{7.3.4}$$

其中 $\hat{Y}$ 表示 Riccati 不等式 $R(\hat{Y}) \leqslant 0$ 的实对称解,$R(\cdot)$由式(7.3.3)定义。于是,如果 T_{z_0w}的 H_2 范数是有限的,则

$$\| T_{z_0w} \|_2^2 = \mathrm{trace}(C_0L_cC_0^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{trace}(C_0YC_0^{\mathrm{T}})$$

由此引出如下线性时不变系统 T 的 H_2/H_∞混合性能指标的定义

$$J(T_{zw}) = \begin{cases} \infty & \text{如果 } D_0 \neq 0 \\ \mathrm{trace}(C_0YC_0^{\mathrm{T}}) & \text{如果 } D_0 = 0 \end{cases} \tag{7.3.5}$$

注意到,如果 T_{z_1w}是严格正则的(即 $D_1 = 0$),则 Riccati 方程(7.3.3)成为

$$R(Y) = AY + YA^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}YC_1^{\mathrm{T}}C_1Y + BB^{\mathrm{T}} = 0 \tag{7.3.6}$$

与定理 7.1.1 中的式(7.1.15)是一致的。因此,性能指标(7.3.5)与 7.1 节的定义式(7.1.19)是相同的。

性能指标 $J(T_{zw})$ 具有如下性质：

(1) $J(T_{zw})$ 仅是传函阵 T_{zw} 的函数，与 T 的具体实现无关，只要实现是内稳定的；

(2) $\| T_{z_0 w} \|_2 \leq \sqrt{J(T_{zw})}$；

(3) $\lim_{\gamma \to \infty} \sqrt{J(T_{zw})} = \| T_{z_0 w} \|_2$。

性质(3)表明，当放宽对 H_∞ 范数界 γ 的限制($\gamma \to \infty$)时，H_2/H_∞ 混合性能指标 $J(T_{zw})$ 将退化为 H_2 范数性能指标。这一点从方程(7.3.6)也可清楚地看出。因为当 $\gamma \to \infty$ 时，Riccati 方程(7.3.6)退化为 Lyapunov 方程(7.3.2)。

下面的引理给出了 H_2/H_∞ 混合性能指标 $J(T_{zw})$ 的另外一个性质。本节后面的讨论将用到这一性质。

【引理 7.3.2】 考虑由式(7.3.1)定义的稳定系统 T，令 T_{zw} 表示从 w 到 $z = [z_0^T \quad z_1^T]^T$ 的传函阵。给定 $\gamma > 0$，设 $\| T_{z_1 w} \|_\infty < \gamma$，且 $T_{z_0 w}$ 是严格正则的，则

$$J(T_{zw}) = \inf\{\mathrm{trace}(C_0 Y C_0^T) \mid Y = Y^T > 0, \mathrm{s.t.}\, R(Y) < 0\} \tag{7.3.7}$$

其中 $R(\cdot)$ 由式(7.3.3)给定。

【证明】 不失一般性，假设 $\gamma = 1$。令 σ 代表式(7.3.7)的右端。首先，我们证明 $\sigma \leq J(T_{zw})$。注意到，由于 $\| T_{z_1 w} \|_\infty < 1$，则存在 $\beta_+ > 0$，使得对每个 $\beta \in [0, \beta_+)$，如下不等式成立(见习题 4.7)

$$\| [T_{z_1 w} \quad T_\beta] \|_\infty < 1 \tag{7.3.8}$$

其中

$$T_\beta = C_1 (sI - A)^{-1} \sqrt{\beta} I$$

根据引理 7.3.1，由式(7.3.8)可得对每个 $\beta \in [0, \beta_+)$，Riccati 方程

$$R_\beta(Y) = R(Y) + \beta I = 0$$

有惟一稳定解 Y_β。而且，根据式(7.3.4)，有 $Y_\beta \geq L_{c\beta}$，其中 $L_{c\beta}$ 是 $(A, [B \quad \sqrt{\beta} I])$ 的能控性 Gramian 矩阵。由于 $(A, [B \quad \sqrt{\beta} I])$ 对 $\beta > 0$ 是能控的，所以，根据推论 6.2.2，如果 $\beta > 0$，则 $Y_\beta \geq L_{c\beta} > 0$。再注意到，如果 $\beta > 0$，则 $R(Y_\beta) < 0$。因此，由 σ 的定义式(7.3.7)的右端我们得到

$$\sigma \leq \mathrm{trace}(C_0 Y_\beta C_0^T) \tag{7.3.9}$$

利用 Riccati 方程稳定解的单调性质，可得 $Y_0 = \lim_{\beta \to 0} Y_\beta$ 存在，且 Y_0 是方程(7.3.3)的解，使得 $A + (Y_0 C_1^T + B D_1^T) M^{-1} C_1$ 是渐近稳定的。由于方程式(7.3.3)有解，比如为 Y，且这样的解是惟一的，因此，$Y_0 = Y$。在不等式(7.3.9)中取极限 $\beta \to 0$，最后得到

$$\sigma \leq \mathrm{trace}(C_0 Y C_0^T) = J(T_{zw})$$

其次，我们证明 $J(T_{zw}) \leq \sigma$。设 Y 为方程(7.3.3)的惟一稳定解。令 $\hat{Y}$ 为满足 $\hat{Y} > 0$ 且 $R(\hat{Y}) < 0$ 的任意实对称矩阵，则根据式(7.3.4)，我们得到 $\hat{Y} \geq Y$。因此

$$J(T_{zw}) = \mathrm{trace}(C_0 Y C_0^T) \leq \mathrm{trace}(C_0 \hat{Y} C_0^T)$$

上式两端对 $\hat{Y}$ 取下确界，即得 $J(T_{zw}) \leq \sigma$。 **证毕**

考虑图 7.1.1 所示 H_2/H_∞ 混合标准控制问题。记闭环传函阵

$$G_{zw} = \begin{bmatrix} G_{z_0 w} \\ G_{z_1 w} \end{bmatrix}$$

其中 G_{z_0w}代表从 w 到 z_0 的闭环传函阵，G_{z_1w}代表从 w 到 z_1 的闭环传函阵。如果控制器 K 使得图 7.1.1 所示闭环系统内稳定，则称 K 为允许的。所有允许控制器的集合记为 $A(G)$。显然，$A(G)\neq\phi$，当且仅当广义被控对象 G 能稳定、能检测。

给定 $\gamma>0$，定义如下控制器集合

$$A_{\infty}(G)=\{K\in A(G)\mid \|G_{z_1w}\|_{\infty}<\gamma\} \tag{7.3.10}$$

则我们有下述 H_2/H_∞混合次优控制问题。

【问题 7.3.4】 对于 H_2/H_∞混合最优性能指标

$$v(G)=\inf\{J(G_{zw})\mid K\in A_{\infty}(G)\} \tag{7.3.11}$$

和任意给定的 $\alpha>v(G)$，设计控制器 $K\in A_{\infty}(G)$，使得

$$J(G_{zw})<\alpha$$

所设计的控制器 K 即可以是状态反馈静态控制器，也可以是输出反馈动态控制器。我们将对其分别进行讨论。

另外，由于传函阵 G_{zw}依赖于传函阵 G 和 K，我们将性能指标 $J(G_{zw})$记为

$$J(G,K)=J(G_{zw}(G,K))$$

7.3.2 状态反馈问题的凸优化解法

设图 7.1.1 中广义被控对象 G 的状态空间描述为

$$\dot{x}=Ax+B_1w+B_2u \tag{7.3.12a}$$

$$z_0=C_0x+D_0u \tag{7.3.12b}$$

$$z_1=C_1x+D_1u \tag{7.3.12c}$$

$$y=x \tag{7.3.12d}$$

设计状态反馈控制律

$$u=Kx \tag{7.3.13}$$

来求解问题 7.3.4。不难求得，状态反馈控制律(7.3.13)与广义对象(7.3.12)构成的闭环系统为

$$\dot{x}=Fx+B_1w \tag{7.3.14a}$$

$$z_0=H_0x \tag{7.3.14b}$$

$$z_1=H_1x \tag{7.3.14c}$$

其中 $F=A+B_2K$、$H_0=C_0+D_0K$ 和 $H_1=C_1+D_1K$。相应的闭环系统框图如图 7.3.2 所示。将式(7.3.14)与式(7.3.1)相比较，闭环系统(7.1.14)中从 w 到 z_0 和 z_1 的直接传输项分别等于零，即闭环传函阵 G_{z_0w}和G_{z_1w}分别为严格正则的。

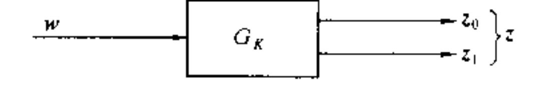


图 7.3.2 闭环系统

由于考虑的是状态反馈控制律设计问题，将广义对象(7.3.12)记为 G_{sf}，下标 sf 表示状态反馈(state feedback)。下面，我们讨论对任意给定的 $\alpha>v(G_{sf})$，通过求解一个凸优化问题，找到一个实矩阵 K，使得 $J(G_{sf},K)<\alpha$。

求解上述设计问题的关键思想是引入一个变量变换

$$K=WY^{-1} \tag{7.3.15}$$

其中 $W\in\mathbf{R}^{p\times n}$，$Y>0$ 是闭环系统(7.3.14)对应的式(7.3.6)形式的 Riccati 不等式 $R(Y)<0$ 的解(见式(7.3.18b))。取而代之的是我们在矩阵空间(W,Y)中搜索控制器 K，而不是在 $K\in A_\infty(G_{sf})$范围内进行搜索。在(W,Y)中搜索 K 的优化问题是一种凸优化问题(见定理7.3.2)，而在 $A_\infty(G_{sf})$中搜索 K 的优化问题是一种非凸优化问题(见例7.3.1)。这就是引入变量变换式(7.3.15)的目的所在。

不失一般性，假设 $\gamma=1$。考虑广义被控对象(7.3.12)，令 Σ 表示 $n\times n$ 维实对称阵的集合，定义

$$\Omega=\{(W,Y)\in\mathbf{R}^{p\times n}\times\Sigma\mid Y>0\}\tag{7.3.16}$$

注意，集合 Ω 是 $\mathbf{R}^{p\times n}\times\Sigma$ 的一个开严格凸子集。给定$(W,Y)\in\Omega$，定义

$$f(W,Y)=\text{trace}\{(C_0Y+D_0W)Y^{-1}(C_0Y+D_0W)^{\text{T}}\}\tag{7.3.17a}$$

利用所引进的变量变换式(7.3.15)和闭环系统表达式(7.3.14)，容易得到

$$f(W,Y)=\text{trace}(H_0YH_0^{\text{T}})\tag{7.3.17b}$$

对于$(W,Y)\in\mathbf{R}^{p\times n}\times\Sigma$，令

$$Q(W,Y)=AY+YA^{\text{T}}+B_2W+W^{\text{T}}B_2^{\text{T}}+B_1B_1^{\text{T}}+(C_1Y+D_1W)^{\text{T}}(C_1Y+D_1W)\tag{7.3.18a}$$

同样，不难得到

$$Q(W,Y)=FY+YF^{\text{T}}+YH_1^{\text{T}}H_1Y+B_1B_1^{\text{T}}=R(Y)\tag{7.3.18b}$$

再定义实矩阵的集合

$$\Phi(G_{sf})=\{(W,Y)\in\Omega\mid Q(W,Y)<0\}\tag{7.3.19}$$

并考虑优化问题

$$\sigma(G_{sf})=\inf\{f(W,Y)\mid(W,Y)\in\Phi(G_{sf})\}\tag{7.3.20}$$

注意，由于在 Ω 上 $f\geqslant0$(见式(7.3.17))，所以 $\sigma(G_{sf})\geqslant0$。

下面的定理给出了本小节的主要结果。

【定理 7.3.1】 考虑式(7.3.12)的广义被控对象 G_{sf}，控制器集合 $A_\infty(G_{sf})$由式(7.3.10)定义。令 $\Phi(G_{sf})$由式(7.3.19)给定。令 $v(G_{sf})$和 $\sigma(G_{sf})$分别由式(7.3.11)和式(7.3.20)所定义，则

$$A_\infty(G_{sf})\neq\phi\Leftrightarrow\Phi(G_{sf})\neq\phi$$

且

$$v(G_{sf})=\sigma(G_{sf})$$

进而，对任意给定的 $\alpha>v(G_{sf})$，存在$(W,Y)\in\Phi(G_{sf})$，使得反馈增益阵 $K=WY^{-1}$满足

$$K\in A_\infty(G_{sf})\text{和}\ J(G_{sf},K)\leqslant f(W,Y)<\alpha$$

【证明】 首先，我们证明，如果 $\Phi(G_{sf})\neq\phi$，则 $A_\infty(G_{sf})\neq\phi$，且 $v(G_{sf})\leqslant\sigma(G_{sf})$。令 $\varepsilon>0$ 给定。根据 $\sigma(G_{sf})$的定义，可得存在$(W,Y)\in\Omega$，使得

$$f(W,Y)\leqslant\sigma(G_{sf})+\varepsilon,\ Q(W,Y)<0$$

其中 $f(W,Y)$和 $Q(W,Y)$分别由式(7.3.17a)和式(7.3.18a)定义。下面我们将构造一个状态反馈控制器 $K\in A_\infty(G_{sf})$，使得 $J(G_{sf},K)\leqslant f(W,Y)$。

式(7.3.15)定义的实矩阵 $K=WY^{-1}$与式(7.3.12)构成的闭环系统为式(7.3.14)，且我们已经得到 $Q(W,Y)$和 $f(W,Y)$的等价表达式(7.3.18b)和式(7.3.17b)。由于 $Y>0$ 满足 $R(Y)<0$，根据引理 4.5.2，F 是渐近稳定的，且 $\|G_{z_1w}\|_\infty<1$。因此，$K=WY^{-1}\in A_\infty(G_{sf})$，

并且利用引理 7.3.2,我们得到 $J(G_{sf},K) \leqslant \mathrm{trace}(H_0 Y H_0^{\mathrm{T}})$。于是

$$v(G_{sf}) \leqslant J(G_{sf},K) \leqslant f(W,Y) \leqslant \sigma(G_{sf}) + \varepsilon$$

因为 ε 是任意的,所以 $v(G_{sf}) \leqslant \sigma(G_{sf})$。

其次,我们证明,如果 $A_\infty(G_{sf}) \neq \phi$,则 $\Phi(G_{sf}) \neq \phi$,且 $v(G_{sf}) \geqslant \sigma(G_{sf})$。令 $\varepsilon > 0$ 给定。根据 $v(G_{sf})$ 的定义式(7.3.11)可知,存在 $K \in A_\infty(G_{sf})$,使得 $J(G_{sf},K) \leqslant v(G_{sf}) + \frac{\varepsilon}{2}$。注意控制律 $u = Kx$ 导致的闭环系统为式(7.3.14),由引理 7.3.2 可知,存在 $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$,使得

$$\mathrm{trace}(H_0 Y H_0^{\mathrm{T}}) \leqslant J(G_{sf},K) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v(G_{sf}) + \varepsilon$$

$$R(Y) = FY + YF^{\mathrm{T}} + YH_1^{\mathrm{T}} H_1 Y + B_1 B_1^{\mathrm{T}} < 0$$

定义 $W = KY$,则

$$(W,Y) \in \Omega \qquad 且 \qquad Q(W,Y) = R(Y) < 0$$

因此,$(W,Y) \in \Phi(G_{sf})$。并且根据式(7.3.17b),$f(W,Y) = \mathrm{trace}(H_0 Y H_0^{\mathrm{T}})$,因此

$$\sigma(G_{sf}) \leqslant f(W,Y) \leqslant v(G_{sf}) + \varepsilon$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的,所以 $v(G_{sf}) \geqslant \sigma(G_{sf})$。

定理最后一部分的证明可由定义和上面 K 的构造直接得到。 **证毕**

定理 7.3.1 的意义在于式(7.3.11)定义的优化问题为非线性规划问题,而式(7.3.20)定义的优化问题是一种凸优化问题。根据 1.5 节的讨论,凸优化问题容易得到全局最优解,且算法简单。下面的定理给出了这样的结果。

【定理 7.3.2】 令 f 和 Φ 分别如式(7.3.17a)和式(7.3.19)所定义。考虑式(7.3.20)定义的优化问题。集合 Φ 是凸集,且函数 $f:\Phi \to \mathbf{R}^+$ 是实解析凸函数。因此,式(7.3.20)定义的优化问题是凸的。

该定理的证明由如下两个引理给出。

【引理 7.3.3】 令 Ω 表示由式(7.3.16)定义的集合。考虑式(7.3.17a)定义的映射 $f:\Omega \to \mathbf{R}^+$,则 f 是 Ω 上的实解析凸函数。

【引理 7.3.4】 令 Q: $\mathbf{R}^{p \times n} \times \Sigma \to \Sigma$ 表示由式(7.3.18a)定义的矩阵值映射,则 Q 是凸映射。

我们仅证明引理 7.3.4。

【证明】 令 $(W,Y) \in \mathbf{R}^{p \times n} \times \Sigma$ 给定,且定义

$$P(W,Y) = AY + YA^{\mathrm{T}} + B_2 W + W^{\mathrm{T}} B_2^{\mathrm{T}} + B_1 B_1^{\mathrm{T}}$$

$$T(W,Y) = C_1 Y + D_1 W$$

我们有

$$Q(W,Y) = P(W,Y) + T^{\mathrm{T}}(W,Y) T(W,Y)$$

令 $\alpha \in [0,1]$ 给定且定义 $\beta = 1 - \alpha$。设 (W_1,Y_1) 和 (W_2,Y_2) 属于 $\mathbf{R}^{p \times n} \times \Sigma$,则经代数运算,可得

$$\begin{aligned}
&Q(\alpha(W_1,Y_1) + \beta(W_2,Y_2)) = \alpha P(W_1,Y_1) + \beta P(W_2,Y_2) + \\
&[\alpha T(W_1,Y_1) + \beta T(W_2,Y_2)]^{\mathrm{T}} [\alpha T(W_1,Y_1) + \beta T(W_2,Y_2)] = \\
&\alpha Q(W_1,Y_1) + \beta Q(W_2,Y_2) - \alpha\beta [T(W_1,Y_1) - T(W_2,Y_2)]^{\mathrm{T}} [T(W_1,Y_1) - \\
&T(W_2,Y_2)] \leqslant \alpha Q(W_1,Y_1) + \beta Q(W_2,Y_2)
\end{aligned}$$

证毕

引理 7.3.3 中，f 的凸性的证明是类似的，读者可作为练习自行证明(标量情形见习题 1.12)或参阅文献[93]，而 f 在开集 Ω 上是实解析的，可由式(7.3.17)直接得到。

【定理 7.3.2 的证明】 由于式(7.3.16)定义的集合 Ω 是凸的，根据引理 7.3.4 和 1.5 节性质 1.5.7(凸映射的水平集是凸的)，我们得到式(7.3.19)的集合 Φ 是凸的。又根据引理 7.3.3，函数 $f(\cdot)$ 在 $\Omega\supset\Phi$ 上是凸的。于是，我们推得式(7.3.20)定义的(有限维)优化问题是凸优化问题。 **证毕**

最后，我们指出，式(7.3.20)定义的凸优化问题的约束集 Φ 在一定的条件下，是有界的(参阅文献[93]中的引理 4.6)，于是，求解式(7.3.20)给定的凸优化问题可得有界解。

【例 7.3.1】 给定如下标量系统 G

$$\dot{x} = -x + w + u$$

$$z_0 = x$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = x$$

取 H_∞ 范数界 $\gamma = 1$。

首先，求解式(7.3.11)给出的 H_2/H_∞ 混合最优控制问题。根据引理 7.3.2，上述系统 G 的 H_2/H_∞ 混合最优性能指标由下式给定

$$v(G) = \inf\{J(G,K) = K^2Y \mid (K,Y)\in\Phi_1\}$$

其中

$$\Phi_1 = \{(K,Y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid Y>0 \text{ 且 } Y^2(1+K^2)+2Y(K-1)+1<0\}$$

$v(G)$ 中的性能指标 $J(G,K) = K^2Y$ 是由引理 7.3.2 中的式(7.3.7)算得，集合 Φ_1 中的关于 Y 的二次不等式为式(7.3.7)中的Riccati 不等式 $R(Y)<0$。

集合 Φ_1 的图象如图 7.3.3 所示。从该图可以清楚地看出，集合 Φ_1 是非凸的，且无界。我们也注意到性能指标函数 $J(G,K) = K^2Y$ 在集合 $\{(K,Y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid Y>0\}$ 上是非凸的。因此，式(7.3.11)给出的 H_2/H_∞ 混合最优控制综合问题是一种无界域上的非凸规划问题。

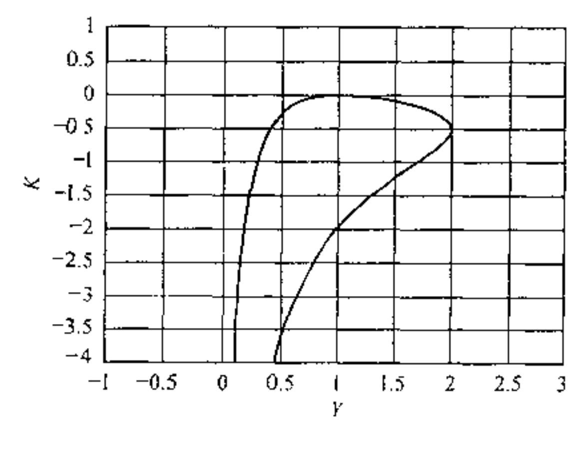


图 7.3.3 集合 Φ_1

其次，我们再来求解式(7.3.20)给出的 H_2/H_∞ 混合最优控制问题和次优控制问题。按式(7.3.20)算得的系统 G 的最优性能指标为

$$\sigma(G) = \inf\{f(W,Y) = W^2Y^{-1} \mid (W,Y)\in\Phi\}$$

其中

$$\Phi = \{(W,Y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid Y>0 \text{ 且 } (W+1)^2+(Y-1)^2<1\}$$

$\sigma(G)$ 中的函数 $f(W,Y) = W^2Y^{-1}$ 按式(7.3.17a)算得，集合 Φ 中的二次不等式为式(7.3.19)中的 $Q(W,Y)<0$。我们看到，约束集 Φ 是一个圆，如图 7.3.4 所示。由图可见，Φ 是凸的有界集。而根据引理 7.3.3，函数 $f(W,Y) = W^2Y^{-1}$ 在集合 $\Omega = \{(W,Y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid Y>0\}$ 上是凸函

数。因此,式(7.3.20)给出的混合最优控制问题是一种凸优化问题。

最后,为了得到问题 7.3.4 给出的次优综合问题的解,即设计控制器 $K\in A_\infty(G)$,使得 $J(G,K)<\alpha$,考虑如下水平集

$$\Lambda_\alpha=\{(W,Y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid Y>0 \text{ 且 } W^2Y^{-1}<\alpha\}$$

则约束集 Φ 与上述水平集的交集,即为次优问题的解集,如图 7.3.4 中阴影部分所示,其中取 $\alpha=1$。

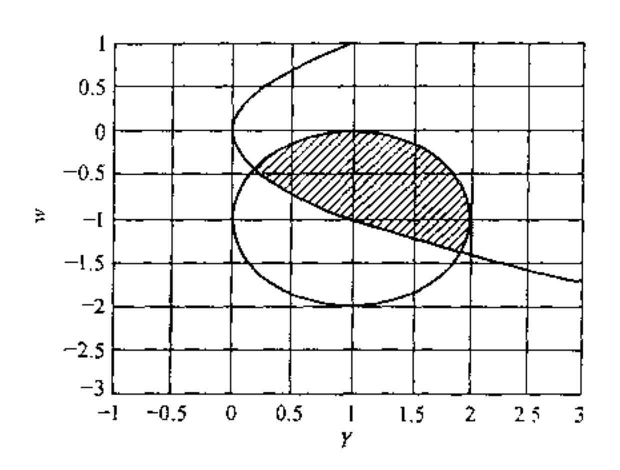


图 7.3.4　集合 Φ 和 Λ_α

7.3.3　输出反馈解

设图 7.1.1 中广义被控对象 G 的状态空间描述为

$$\dot{x}=Ax+B_1w+B_2u \tag{7.3.21a}$$

$$z_0=C_0x+D_0u \tag{7.3.21b}$$

$$z_1=C_1x+D_1u \tag{7.3.21c}$$

$$y=C_2x+D_2w \tag{7.3.21d}$$

上述模型中从 w 到 z_0、z_1 的直接传输项和从 u 到 y 的直接传输项分别取为零。这样做的目的只是为了使表达式尽可能简洁,而并不失一般性。此外,我们做如下假设:

(A_1)　(A,B_2)能稳定,(C_2,A)能检测。

(A_2)　(A,B_1)能稳定。

(A_3)　D_2 行满秩,且 $D_2[B_1^{\mathrm{T}}\quad D_2^{\mathrm{T}}]=[0\quad I]$。

我们将看到,处理广义对象(7.3.21)的输出反馈动态控制器设计问题的关键思想是将输出反馈动态控制器设计问题简化为一个辅助对象的状态反馈静态控制器设计问题,然后,利用上小节给出的方法求解辅助对象的状态反馈解,即可得广义对象(7.3.21)的输出反馈解。

设存在(惟一)实对称阵 Y,使得

$$AY+YA^{\mathrm{T}}+Y(\gamma^{-2}C_1^{\mathrm{T}}C_1-C_2^{\mathrm{T}}C_2)Y+B_1B_1^{\mathrm{T}}=0 \tag{7.3.22}$$

且 $A+Y(\gamma^{-2}C_1^{\mathrm{T}}C_1-C_2^{\mathrm{T}}C_2)$稳定。

定义如下辅助系统

$$\dot{x}=(A+\gamma^{-2}YC_1^{\mathrm{T}}C_1)x+YC_2^{\mathrm{T}}W+(B_2+\gamma^{-2}YC_1^{\mathrm{T}}D_1)u \tag{7.3.23a}$$

$$z_0=C_0x+D_0u \tag{7.3.23b}$$

$$z_1=C_1x+D_1u \tag{7.3.23c}$$

$$y=x \tag{7.3.23d}$$

其中矩阵 A、C_0、C_1、D_0、D_1、B_1、B_2 如式(7.3.21)所定义。将广义辅助被控对象(7.3.23)记为 $G_{sf}(Y)$,表示这个辅助对象依赖于 Y,且具有状态反馈结构。

【定理 7.3.3】　考虑图 7.1.1 所示系统,其中广义被控对象由式(7.3.21)给定。设假设条件(A_1)~(A_3)成立,$\gamma>0$ 给定。令 $A_\infty(G)$表示由式(7.3.10)定义的控制器集合,且设 $A_\infty(G)\neq\phi$。设存在惟一(实对称)阵 $Y\geqslant 0$ 满足 Riccati 方程(7.3.22),且使 $A+Y(\gamma^{-2}C_1^{\mathrm{T}}C_1-C_2^{\mathrm{T}}C_2)$稳定,则:

(1) $A_\infty(G_{sf}(Y)) \neq \phi$，且式(7.3.11)定义的 H_2/H_∞ 混合最优性能指标由下式给定

$$v(G) = \text{trace}(C_0 Y C_0^{\mathrm{T}}) + v(G_{sf}(Y)) \tag{7.3.24}$$

(2) 给定任意 $\alpha > v(G)$，存在实矩阵 K，使得

$$K \in A_\infty(G_{sf}(Y)) \quad \text{且} \quad J(G_{sf}(Y), K) < \alpha - \text{trace}(C_0 Y C_0^{\mathrm{T}})$$

(3) 对任意 $K \in A_\infty(G_{sf}(Y))$，动态输出反馈控制器 C

$$\dot{\xi} = (A + Y(\gamma^{-2} C_1^{\mathrm{T}} C_1 - C_2^{\mathrm{T}} C_2) + (B_2 + \gamma^{-2} Y C_1^{\mathrm{T}} D_1) K)\xi + Y C_2^{\mathrm{T}} y \tag{7.3.25a}$$

$$u = K\xi \tag{7.3.25b}$$

满足

$$C \in A_\infty(G) \quad \text{且} \quad J(G, C) = \text{trace}(C_0 Y C_0^{\mathrm{T}}) + J(G_{sf}(Y), K)$$

该定理的证明需要较多的引理，此处从略。有兴趣的读者可参阅文献[93]。下面对定理的结果做些解释。

定理 7.3.3 指出，广义被控对象(7.3.21)的 H_2/H_∞ 混合次优动态控制器的综合问题是由一个 H_∞ 状态估计器(7.3.25a)和对应于辅助对象 $G_{sf}(Y)$ 的 H_2/H_∞ 混合设计问题的状态反馈增益阵(7.3.25b)组合而成。因此，这一结果和上小节得到的状态反馈设计方法提供了式(7.3.21)系统的 H_2/H_∞ 混合动态控制器设计问题的一个完整的解法。式(7.3.24)说明，输出反馈情形下的 H_2/H_∞ 混合最优性能指标 $v(G)$ 可以通过计算辅助对象 $G_{sf}(Y)$ 的状态反馈情形下的最优性能指标 $v(G_{sf})$ 而得到。并且，对任意给定的 $\alpha > 0$，使得 $J(G, C) < \alpha$ 的次优综合问题的解 $C \in A_\infty(G)$ 由式(7.3.25)给定，而式(7.3.25)可通过求 Riccati 方程(7.3.22)的稳定解和求辅助对象 $G_{sf}(Y)$ 对应的状态反馈问题满足 $J(G_{sf}(Y), K) < \alpha - \text{trace}(C_0 Y C_0^{\mathrm{T}})$ 的解 $K \in A_\infty(G_{sf}(Y))$ 而得到。

7.4 H_2/H_∞ 混合控制的参数化方法

我们在 4.5 节和 6.3 节分别给出了单目标输出反馈 H_∞ 次优控制和 H_2 次优控制的参数化求解公式，即定理 4.5.3 和定理 6.3.2 的结果。并且在 4.5.3 小节将 H_∞ 次优控制器参数化结果转换到频率域，即定理 4.5.4。在 6.3.2 小节将 H_2 次优控制器参数化结果(定理 6.3.2)转换到频率域，即定理 6.3.3。本节基于这两个 H_∞ 和 H_2 次优控制器的频率域参数化公式，我们来求解 H_2/H_∞ 混合控制问题的参数化控制器的设计问题。从而给出一种 H_2/H_∞ 混合控制的参数化方法。

【问题 7.4.1】 求所有控制器 K，使得 K 镇定广义对象 G，且对给定的 γ_0、γ_1，有

$$\| G_{z_0 w} \|_2 < \gamma_0 \tag{7.4.1}$$

$$\| G_{z_1 w} \|_\infty < \gamma_1 \tag{7.4.2}$$

其中 $\gamma_0 > \min\limits_K \| G_{z_0 w} \|_2$。

设广义对象 G 的状态空间实现为式(7.1.20)，重写于下

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \tag{7.4.3a}$$

$$z_i = C_i x + D_i u \quad i = 0, 1 \tag{7.4.3b}$$

$$y = C_2 x + D_2 w \tag{7.4.3c}$$

且满足如下假设条件：

(B_1)　$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_i)$能稳定$(i=1,2)$，$(\boldsymbol{C}_i,\boldsymbol{A})$能检测$(i=0,1,2)$。

(B_2)　$\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}_i \quad \boldsymbol{D}_i]=[\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{I}]\ (i=0,1)$，$\boldsymbol{D}_2[\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}]=[\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{I}]$。

通过比较，读者不难发现式(7.4.3)各矩阵与6.3节和4.5节中各矩阵之间的对应关系。

根据定理4.5.4的H_∞次优控制的频率域参数化结果和定理6.3.3的H_2次优控制的频率域参数化结果，可以证明问题7.4.1给出的H_2/H_∞混合次优控制问题的参数化结果。

【定理7.4.1】　如果式(4.5.19a)和式(4.5.19b)的Riccati方程有解：$\boldsymbol{X}_\infty \geqslant \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{Y}_\infty \geqslant \boldsymbol{0}$，$\rho(\boldsymbol{X}_\infty,\boldsymbol{Y}_\infty)<\gamma_1^2$，且$\boldsymbol{X}_2 \geqslant \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{Y}_2 \geqslant \boldsymbol{0}$为Riccati方程(6.3.4a)和(6.3.4b)的解，则问题7.4.1的解集合(控制器集合)为

$$S_2^\infty(\boldsymbol{K}) = \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q}_2) = \widetilde{\boldsymbol{M}}_2^1 + \widetilde{\boldsymbol{M}}_2^2\boldsymbol{Q}_2)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_2^4\boldsymbol{Q}_2)^{-1}\boldsymbol{M}_2^3 \mid \boldsymbol{Q}_2 \in \Lambda_2\} \tag{7.4.4a}$$

$$= \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q}_\infty) = (\widetilde{\boldsymbol{M}}_\infty^1 + \widetilde{\boldsymbol{M}}_\infty^2\boldsymbol{Q}_\infty)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_\infty^4\boldsymbol{Q}_\infty)^{-1}\boldsymbol{M}_\infty^3 \mid \boldsymbol{Q}_\infty \in \Lambda_\infty\} \tag{7.4.4b}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_2 = \{&\boldsymbol{Q}_2 \in RH_2,\ \|\boldsymbol{Q}_2\|_2^2 < \gamma_0^2 - (\|\boldsymbol{G}_c\boldsymbol{B}_2\|_2^2 + \|-\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{G}_f\|_2^2),\ \det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_2^4\boldsymbol{Q}_2) \neq 0,\ \text{且}\\ &\exists\, \boldsymbol{Q}_\infty \in RH_\infty,\ \|\boldsymbol{Q}_\infty\|_\infty < \gamma_1,\ \det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_\infty^4\boldsymbol{Q}_\infty) \neq 0,\ \text{s.t. } \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{Q}_\infty + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{H}_3 + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{Q}_\infty\\ &= \boldsymbol{0}\}\end{aligned} \tag{7.4.5a}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_\infty = \{&\boldsymbol{Q}_\infty \in RH_\infty,\ \|\boldsymbol{Q}_\infty\|_\infty < \gamma_1,\ \det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_\infty^4\boldsymbol{Q}_\infty) \neq 0,\ \text{且}\ \exists\, \boldsymbol{Q}_2 \in RH_2,\ \|\boldsymbol{Q}_2\|_2^2 < \gamma_0^2 -\\ &(\|\boldsymbol{G}_c\boldsymbol{B}_1\|_2^2 + \|-\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{G}_f\|_2^2),\ \det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_2^4\boldsymbol{Q}_2) \neq 0,\ \text{s.t. } \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{Q}_\infty + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{H}_3 +\\ &\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{Q}_\infty = \boldsymbol{0}\}\end{aligned} \tag{7.4.5b}$$

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}_1 = \overline{\boldsymbol{M}}_2^1\boldsymbol{M}_2^{3^{-1}} - \boldsymbol{M}_2^{2^{-1}}\widetilde{\boldsymbol{M}}_\infty^1,\ \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{M}_2^{2^{-1}}\widetilde{\boldsymbol{M}}_\infty^2 + \overline{\boldsymbol{M}}_2^1\boldsymbol{M}_\infty^{3^{-1}}\boldsymbol{M}_\infty^4,\ \boldsymbol{H}_3 = \overline{\boldsymbol{M}}_2^3\boldsymbol{M}_2^{3^{-1}} + \boldsymbol{M}_2^4\boldsymbol{M}_2^{2^{-1}}\widetilde{\boldsymbol{M}}_\infty^1,\\ &\boldsymbol{H}_4 = \boldsymbol{M}_2^4\boldsymbol{M}_2^{2^{-1}}\widetilde{\boldsymbol{M}}_\infty^2 - \overline{\boldsymbol{M}}_2^3\boldsymbol{M}_\infty^{3^{-1}}\boldsymbol{M}_\infty^4\end{aligned} \tag{7.4.6}$$

【证明】　由定理6.3.3，满足性能(7.4.1)且使闭环内稳定的控制器为$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q}_2)$。由定理4.5.4，满足性能(7.4.2)且使闭环内稳定的控制器为$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q}_\infty)$，则$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q}_2)$(或$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q}_\infty)$)使闭环系统内稳定且同时使性能(7.4.1)和(7.4.2)成立的充分必要条件为

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q}_2) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q}_\infty)$$

类似于定理4.5.5的证明中的推演，不难得到，上式等价于

$$\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{Q}_\infty + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{H}_3 + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{Q}_\infty = \boldsymbol{0} \tag{7.4.7}$$

其中$\boldsymbol{H}_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$分别由式(7.4.6)确定。　　**证毕**

式(7.4.7)给出了关于参数$\boldsymbol{Q}_2$和$\boldsymbol{Q}_\infty$的一个二次方程约束条件。具体应用时，应适当选择$\boldsymbol{Q}_2$或$\boldsymbol{Q}_\infty$，使式(7.4.7)成立。

【例7.4.1】　设图7.1.1中广义对象G的状态空间实现为

$$\dot{x} = -x + [0.6 \quad 0]\boldsymbol{w} + u,\ \boldsymbol{w} = [w_1 \quad w_2]^{\mathrm{T}}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,\ z_1 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = x + [0 \quad 1]\boldsymbol{w}$$

设计目标为$\|\boldsymbol{G}_{z_0w}\|_2 < \gamma_0 = 1.044$，$\|\boldsymbol{G}_{z_1w}\|_2 < \gamma_1 = 1$。求满足以上两性能指标且使闭环系统内稳定的控制器集合。可算得

$$\boldsymbol{X}_2 = 0.118,\ \boldsymbol{Y}_2 = 0.166,\ \boldsymbol{X}_\infty = 0.292,\ \boldsymbol{Y}_\infty = 0.175$$

$\|\boldsymbol{G}_c\boldsymbol{B}_1\|_2^2 + \|-\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{G}_f\|_2^2 = 0.042 + 0.002 = 0.044$。所求控制器的集合为

$$K(Q_2)=(\widetilde{M}_2^1+\widetilde{M}_2^2Q_2)(I-M_2^4Q_2)^{-1}M_2^3=\frac{-0.02+(s+1)Q_2}{s+1.284+Q_2}$$

其中

$$\begin{aligned}Q_2\in\{&Q_2\in RH_2,\ \|Q_2\|_2<1,\text{且}\exists Q_\infty\in RH_\infty,\ \|Q_\infty\|_\infty<1,\ s.t.\ 0.034s^3+0.132s^2+\\&0.172s+0.074-(s^4+4.818s^3+8.653s^2+6.86s+2.024)Q_\infty+(s^4+5.026s^3+\\&9.48s^2+7.956s+2.508)Q_2+(0.054s^3+0.318s^2+0.559s+0.308)Q_2Q_\infty=0\}\end{aligned}$$

若取 $Q_2=\frac{1}{s+2}$,则 $Q_2\in RH_2$,$\|Q_2\|_2=0.5$,由约束条件可算得

$$Q_\infty=-\frac{1.034s^4+5.226s^3+9.916s^2+8.374s+2.656}{s^5+6.818s^4+18.235s^3+23.848s^2+15.185s+3.74}$$

可验证 Q_∞的分母多项式为霍尔维茨多项式,即 $Q_\infty\in RH_\infty$,且 $\|Q_\infty\|_\infty=0.71$。

附　　录

附录 1　矩阵的迹

定义方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹 trace[$\boldsymbol{A}$]为主对角线元素之和。具有下列性质：

(1) $\mathrm{trace}[\alpha \boldsymbol{A}] = \alpha \mathrm{trace}[\boldsymbol{A}]$。

(2) $\mathrm{trace}[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}] = \mathrm{trace}[\boldsymbol{A}] + \mathrm{trace}[\boldsymbol{B}]$。

(3) $\mathrm{trace}[\boldsymbol{A}] = \mathrm{trace}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]$。

(4) $\mathrm{trace}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}] = \mathrm{trace}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}] = \mathrm{trace}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}] = \mathrm{trace}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]$。

(5) 如果 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}$，则 $\mathrm{trace}[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$。

附录 2　线性系统运算规则

设

$$\boldsymbol{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right],\ \boldsymbol{G}_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 \\ \hline \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_1 \end{array}\right],\ \boldsymbol{G}_2(s) = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 \\ \hline \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_2 \end{array}\right]$$

则有

(1)
$$\boldsymbol{G}_1(s) + \boldsymbol{G}_2(s) = \left[\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 \\ \hline \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2 \end{array}\right]$$

(2)
$$\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s) = \left[\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 \\ \hline \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2 \end{array}\right]$$

(3)
$$\boldsymbol{G}^{-1}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \hline -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{array}\right]$$

(4)
$$\boldsymbol{G}^{\sim}(s) = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(-s) = \left[\begin{array}{c|c} -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ \hline -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \end{array}\right]$$

(5) 设 $\boldsymbol{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right]$，则

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^{\sim}(s)\boldsymbol{G}(s)]^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I} \end{array}\right]$$

附录3 能控、能观测的PBH判据

给定 n 阶线性定常系统

$$(G)\ \dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0, t \geq 0$$

判据1（PBH秩判据） 系统(G)为完全能控的充分必要条件是对矩阵 A 的所有特征值 λ_i ($i = 1,2,\cdots,n$)，均有

$$\mathrm{rank}[\lambda_i I - A \quad B] = n \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

或等价地表示为

$$\mathrm{rank}[sI - A \quad B] = n, \forall s \in \mathbf{C}$$

也即($sI - A$)与 B 是左互质的。

判据2（PBH特征向量判据） 系统(G)完全能控的充分必要条件是 A 不能有与 B 的所有列正交的非零左特征向量，也即对 A 的任一特征值 λ_i 能同时满足

$$u_i A = \lambda_i u_i, u_i B = 0$$

的特征向量 $u_i \equiv 0$。

类似地，给定 n 阶线性定常系统

$$(G)\begin{cases}\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0 \\ y = Cx\end{cases}$$

判据3（PBH秩判据） 系统(G)完全能观测的充分必要条件是对矩阵 A 的所有特征值 λ_i ($i = 1,2,\cdots,n$)，均有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix} = n \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

或等价地表示为

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbf{C}$$

也即($sI - A$)与 C 是右互质的。

判据4（PBH特征向量判据） 系统(G)为完全能观测的充分必要条件是矩阵 A 没有与 C 的所有行正交的非零右特征向量，也即对 A 的任一特征值 λ_i，使得能同时满足

$$Av_i = \lambda_i v_i, Cv_i = 0$$

的特征向量 $v_i \equiv 0$。

附录4 能稳定性与能检测性

给定 n 阶线性定常系统

$$(G)\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases}$$

设 A 的特征值为 λ_i ($i = 1,2,\cdots,n$)，称为系统(G)的极点。设 u_i, v_i ($i = 1,2,\cdots,n$)分别为 λ_i ($i = 1,2,\cdots,n$)的左特征向量和右特征向量，即

$$u_i A = \lambda_i u_i$$

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

如果 $u_iB \neq 0$,则称 λ_i 为(A,B)的能控极点;如果 $u_iB=0$,则称 λ_i 为(A,B)的不能控极点。如果所有 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$均为能控极点,则称$(A,B)$为能控的;如果$(A,B)$的所有不能控极点均具有负实部,则称$(A,B)$为能稳定的。

(A,B)能稳定的等价条件为:

(1) 若 $\mathrm{Re}(\lambda_i)\geqslant 0$,则 $u_iB\neq 0$。

(2) 若 $\mathrm{Re}(\lambda_i)\geqslant 0$,则 $\mathrm{rank}[A-\lambda_i I \quad B]=n$。

(3) 存在适当选择的矩阵 F,使得 $A+BF$ 成为稳定阵,即 $A+BF$ 的特征值均具有负实部。

(4) 若存在相似变换,使得

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},\ T^{-1}B=\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则 A_{22}为稳定阵,(A_{11},B_1)是能控的。

类似地,可定义能检测性如下。

如果 $Cv_i\neq 0$,则称 λ_i 为(C,A)的能观测极点;如果 $Cv_i=0$,则称 λ_i 为(C,A)的不能观测极点。如果所有 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$均为能观测极点,则称$(C,A)$为能观测的,如果$(C,A)$的所有不能观测极点均具有负实部,则称$(C,A)$为能检测的。

(C,A)能检测的等价条件为:

(1) 若 $\mathrm{Re}(\lambda_i)\geqslant 0$,则 $Cv_i\neq 0$。

(2) 若 $\mathrm{Re}(\lambda_i)\geqslant 0$,则 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda_i I \\ C \end{bmatrix}=n$。

(3) 存在适当选择的矩阵 H,使得 $A+HC$ 成为稳定阵。

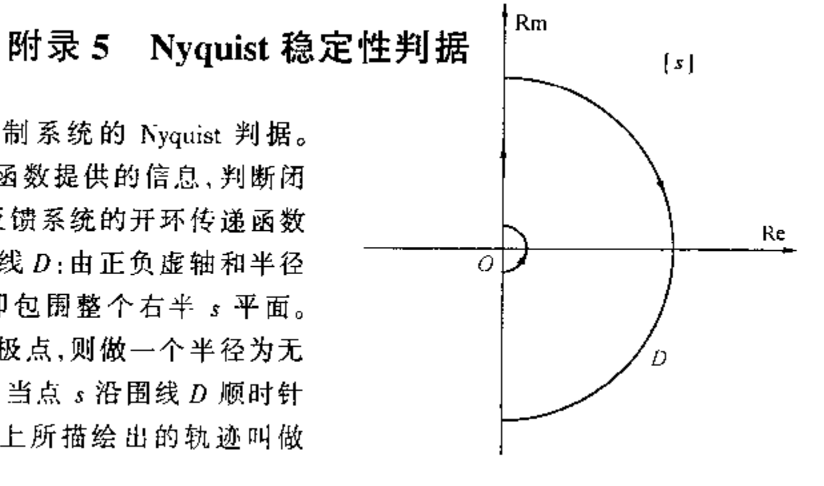
(4) 若存在相似变换,使得

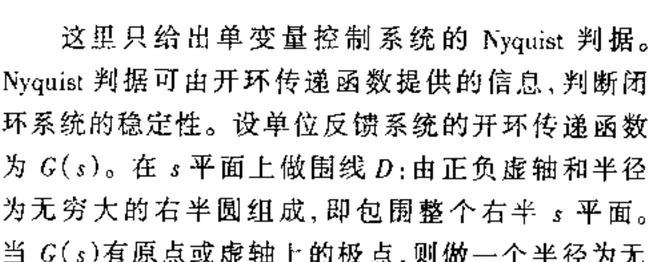
$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ C=[C_1 \quad 0]$$

则 A_{22}是稳定阵,(C_1,A_{11})能观测。

此外,如果(A,B)能稳定,则$(B^{\mathrm{T}},A^{\mathrm{T}})$能检测;如果$(C,A)$能检测,则$(A^{\mathrm{T}},C^{\mathrm{T}})$能稳定。反之亦然。

附录 5　Nyquist 稳定性判据





这里只给出单变量控制系统的 Nyquist 判据。Nyquist 判据可由开环传递函数提供的信息,判断闭环系统的稳定性。设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)$。在 s 平面上做围线 D:由正负虚轴和半径为无穷大的右半圆组成,即包围整个右半 s 平面。当 $G(s)$有原点或虚轴上的极点,则做一个半径为无穷小的右半圆避开该极点。当点 s 沿围线 D 顺时针绕行一圈,$G(s)$在 G 平面上所描绘出的轨迹叫做

Nyquist 曲线。

判据(Nyquist 判据)　令 P 表示 $G(s)$在开右半 s 平面上的极点总数。那么,反馈系统是内稳定的,当且仅当 Nyquist 曲线不通过 G 平面上的$(-1,j0)$点,且逆时针围绕$(-1,j0)$点 P 圈。

附录 6　分块矩阵的逆

设 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

(1) 若 $\det(A_{11})\neq 0$,则 $\det(A)\neq 0\Leftrightarrow\det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\neq 0$。我们有

$$\det A=\det A_{11}\det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$$

(2) 若 $\det(A_{11})\neq 0,\det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\neq 0$,则 A^{-1}存在。

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}+A_{11}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}\\ -(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}\end{bmatrix}$$

(3) 若 $\det(A_{22})\neq 0$,则 $\det(A)\neq 0\Leftrightarrow\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\neq 0$。我们有

$$\det A=\det A_{22}\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$$

(4) 若 $\det(A_{22})\neq 0,\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\neq 0$,则 A^{-1}存在。

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & A_{22}^{-1}+A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$

(5) 若 $\det(A_{11})\neq 0$ 且 $\det(A_{22})\neq 0$,当 $\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\neq 0$ 和 $\det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\neq 0$ 有一个成立时,则另一个及 $\det(A)\neq 0$ 成立。

若 $A_{21}=0$,则

(6) $\det(A_{11})\neq 0$ 且 $\det(A_{22})\neq 0\Leftrightarrow\det(A)\neq 0$。

(7) $\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\ 0 & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}$

若 $A_{12}=0$,则

(8) $\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & 0\\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}$

(9) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵,B 为 $n\times m$ 阶矩阵,则

$$\det(I_m+AB)=\det(I_n+BA)$$

附录 7　矩阵乘积的秩

(1) 设 A、B 为同一数域上的 $m\times n$ 与 $n\times q$ 阶矩阵,则 $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B-n\leqslant\operatorname{rank}(AB)\leqslant\min(\operatorname{rank}A,\operatorname{rank}B)$

(2) 设 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$,则

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}AA^{*}=\operatorname{rank}A^{*}A$$

(3) 设 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$(或 $\mathbf{R}^{m\times n}$),则

$$\operatorname{rank} A = n \Leftrightarrow \det(A^* A)\neq 0 \quad (\text{或 } \det(A^{\mathrm{T}}A)\neq 0)$$
$$\operatorname{rank} A = m \Leftrightarrow \det(AA^*)\neq 0 \quad (\text{或 } \det(AA^{\mathrm{T}})\neq 0)$$

附录 8 矩阵求逆引理

$$(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

附录 9 矩阵的满秩分解

设非零矩阵 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$,rank $A=r$,$r\leqslant \min(m,n)$,则存在列满秩矩阵 $C\in \mathbf{C}^{m\times r}$与行满秩矩阵 $D\in \mathbf{C}^{r\times n}$,使得 $A=CD$。例如,对 A 施行一系列行、列初等变换,使 A 变成

$$APQ=\begin{bmatrix} A_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

其中 A_r 为 r 阶满秩方阵。于是

$$A=P^{-1}\begin{bmatrix} A_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}Q^{-1}=P^{-1}\begin{bmatrix} A_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}[I_r \quad \mathbf{0}]Q^{-1}$$

取 $C=P^{-1}\begin{bmatrix} A_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\in \mathbf{C}^{m\times r}$,$D=[I_r \quad \mathbf{0}]Q^{-1}\in \mathbf{C}^{r\times n}$即可。

参考文献

[1] 刘树琪等.泛函分析入门及题解.天津:天津科学技术出版社,1988

[2] 王向东.数学分析的概念与方法.上海:上海科学技术文献出版社,1989

[3] 关肇直等.线性泛函分析入门.上海:上海科学技术文献出版社,1979

[4] 高黛陵等.多变量频率域控制理论.北京:清华大学出版社,1998

[5] 王翼.自动控制中的基础数学——微分方程与差分方程.北京:科学出版社,1987

[6] 解可新等.最优化方法.天津:天津大学出版社,1997

[7] 《运筹学》教材编写组.运筹学.北京:清华大学出版社,1990

[8] 韩京清等.线性系统理论代数基础.沈阳:辽宁科学技术出版社,1985

[9] 解学书.最优控制理论与应用.北京:清华大学出版社,1986

[10] 王子才等.应用最优控制.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989

[11] 王贞荣.最优控制.北京:冶金工业出版社,1989

[12] 塞奇·怀特著.最优系统控制.汪寿基等译.北京:水力电力出版社,1985

[13] 郭尚来.随机控制.北京:清华大学出版社,1999

[14] Tse E On the optimal control of stochastic linear systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1971, 16(11): 776 ~ 784

[15] Wonham W M On the separation theorem of stochastic control. SIM. J. Control, 1968, 6: 312 ~ 326

[16] J C 多伊尔等著.反馈控制理论.幕春棣译.北京:清华大学出版社,1993

[17] 解学书等. H_∞ 控制理论.北京:清华大学出版社,1994

[18] 姜长生等.系统理论与鲁棒控制.北京:航空工业出版社,1998

[19] 申铁龙. H_∞ 控制理论及应用.北京:清华大学出版社,1996

[20] 陈启宗.线性系统理论与设计.北京:科学出版社,1988

[21] Youla D C et al. Modern Wiener-Holp design of optimal controllers-part Ⅱ: The multivariable case. IEEE Trans. Automat. Control, 1976, 21: 319 ~ 338

[22] Youla D C et al. Single-loop feedback stabilization of linear multivariable plants. Automatica, 1974, 10: 159 ~ 173

[23] Zames. G Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and aproximate inverse. IEEE Trans. Automat. Control, 1981, 26: 301 ~ 320

[24] Doyle J C Analysis of control systems with structured uncertainty. IEE Proc. Part D, 1982, 129: 242 ~ 250

[25] 张卫东等.频域控制理论的发展及其取得的成就.控制与决策,1996,11(2):242 ~ 249

[26] 王德进.基于控制器参数化的渐近跟踪与静态解耦.信息与控制,1999,28(2):157 ~ 160

[27] 王德进.基于控制器参数化的极点配置.黑龙江大学自然科学学报,1999,16(3):35 ~ 38

[28] Morari M et al. Robust process control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. N.J, 1989

[29] Saeks R et al, Fractional representation, Algebraic geometry and Simultaneous stabilization problem. IEEE Trans. Automat. Control, 1982, 27(4): 895 ~ 903

[30] Vidyasagar M et al. Algebraic design techniques for reliable stabilization. IEEE Trans. Automat. Control, 1982, 27(5): 1085 ~ 1095

[31] Vidyasagar M Some results on simultaneous stabilization with multiple domains of stability. Automatica, 1987, 23(4): 535 ~ 540

[32] Wu dongnan et al. Algorithm for simultaneous stabilization of single input systems via dynamic feedback. Int. J. Control, 1990, 51(3): 631 ~ 642

[33] Chen H B et al. Simultaneous stabilization using stable system inversion. Automatica, 1995, 31(4): 531 ~ 542

[34] 曹永岩等.基于互质分解的同时镇定控制器参数化.控制理论与应用, 1995, 12(4): 503 ~ 508

[35] 王德进等.满足 H_∞ 和 H_2 性能的同时镇定控制器参数化.控制与决策, 1998. 13(5): 532 ~ 536

[36] Cao Yong-yan et al. Static output feedback simultaneous stabilization: ILMI approach. Int. J. Control, 1998, 70(5): 803 ~ 814

[37] 王德进.一类稳定最小相位对象同时镇定 H_∞ 性能设计.控制理论与应用, 1999, 16(1): 141 ~ 144

[38] 王德进等.同时镇定渐近跟踪与干扰抑制.自动化技术与应用, 1999, 18(6): 19 ~ 22

[39] Doyle J C. Guaranteed margins for LQG regulators. IEEE Trans. Automat. Control, 1978, 23: 756 ~ 757

[40] Soroka E et al. On the robustness of LQ regulator. IEEE Trans. Automat. Control, 1984, 29: 664 ~ 665

[41] Zhou K et al. An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization. Systems & Control Letters, 1988, 11: 85 ~ 92

[42] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P and Francis B A. State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. IEEE Trans. Automat. Control, 1989, 34: 831 ~ 847

[43] Ravi R et at. H_∞ control of linear time-varying systems: A state space approach. SIM. J. Contr. Optimiz., 1991, 29: 1394 ~ 1413

[44] Vander A J Schaft. On a state space approach to nonlinear H_∞ control. systems & Control Letters, 1991, 16: 1 ~ 8

[45] Vander A J Schaft. L_2 - gain analysis of nonlinear Systems and nonlinear H_∞ control. IEEE Trans. Automat. Control, 1992, 37(6): 770 ~ 784

[46] 洪奕光等.非线性 H_∞ 控制的粘性解及近似逼近分析.自动化学报, 1998. 24(4): 447 ~ 453

[47] 谭文等.有限维线性系统 H_∞ 理论进展评述。控制与决策, 1994, 9(2): 81 ~ 87

[48] Basar T. Dynamic games approach to controller design: Disturbance rejection in discrete-time systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1991, 36: 936 ~ 952

[49] Lin W et al. H_∞ control of discrete-time nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Control. 1996, 41: 495 ~ 510

[50] Khargonekar P P et al. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilization and H_∞ control theory. IEEE Trans. Automat. Control, 1990, 35:356 ~ 361

[51] Xie L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. Int. J. Control, 1996, 63(4):741 ~ 750

[52] Ge J H et al. Robust H_∞ state feedback control for linear systems with state delay and parameter uncertainty. Automatica, 1996, 32(8):1183 ~ 1185

[53] Lee J H et al. Memoryless H_∞ controller for state delayed systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1994, 39(1):159 ~ 162

[54] He J B et at. H_∞ disturbance attenuation for state delayed systems. Systems & Control Letters, 1998, 33:105 ~ 114

[55] Bernstein D S et al. LQG control with an H_∞ performance bound: Riccati equation approach. IEEE Trans. Automat. Control, 1989, 34(4):293 ~ 305

[56] Theodor Y et al. H_∞ multiple objective robust controllers for infinite-horizon single measurement single control input problems. IEEE Trans. Automat. Control, 1994, 39(10):2130 ~ 2134

[57] Wang D J. Parameterization for H_∞ multiple objective controllers. Proc. The 4th Asian Pacific Int. Symp. on Instrumentation, Measurement & Automatic Control (IMC'99), Beijing, China, Aug. 1999. 117 ~ 120

[58] Derese I et al. Design of linear feedback laws for bilinear systems. Int. J. Control, 1980, 31: 219 ~ 237

[59] Safonov G et al. Simplifying the H_∞ theory via loopshifting, matrix-pencil and descriptor concepts. Int J. Control, 1989, 50(6):2467 ~ 2488

[60] Sampei M et al. An algebraic approach to H_∞ output feedback control problems. Systems & Control Letters, 1990, 14:13 ~ 24

[61] Boyd S et al. Linear matrix inequalities in system and control thoery. Philadelphia, PA: SIAM. 1994

[62] Glover K and Doyle J C. State space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞-norm bound and relations to risk sensitivity. Systems & Control Letters, 1988, 11: 167 ~ 172

[63] Iwasaki T and Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. Automatica, 1994, 30(8):1307 ~ 1317

[64] Gahinet P and Apkarian P A. linear matrix inequality approach to H_∞ control. Int. J. Robust Nonlinear Control, 1994, 4:421 ~ 448

[65] Gahinet P. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis. Automatica, 1996, 32(7):1007 ~ 1014

[66] Veillette R J et al. Design of reliable control systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1992, 37(3):290 ~ 304

[67] Seo C J and Kim B K. Robust and reliable H_∞ control for linear systems with parameter uncertainty and actuator failure. Automatica, 1996, 32(3):465 ~ 467

[68] Choi H H et al. Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and

control. Automatica, 1995, 31(6): 917 ~ 919

[69] Choi H H et al. Observer-based H_∞ controller design for state delayed linear systems. Automatica, 1996, 32(7): 1073 ~ 1075

[70] Choi H H et al. Robust observer-based H_∞ controller design for linear uncertain time varying systems. Automatica, 1997, 33(9): 1749 ~ 1752

[71] Yu L et al. Robust memoryless H_∞ controller design for linear time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainty. Automatica, 1996, 32(12): 1759 ~ 1762

[72] Kokame H et al. Robust H_∞ performance for linear delay-differential systems with time varying uncertainties. IEEE Trans. Automat. Control, 1998, 43(2): 223 ~ 226

[73] Kim J Het al. H_∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system. Automatica, 1999, 35: 1443 ~ 1451

[74] Jeung E T et al. H_∞ output feedback controller design for linear systems with time varying delayed state. IEEE Trans. Automat. Control, 1998, 43(7): 971 ~ 974

[75] Carlos E de Souza and Li Xi. Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear state-delayed systems. Automatica, 1999, 35: 1313 ~ 1321

[76] Su T Jet al. Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1992, 37(10): 1656 ~ 1659

[77] 姜偕富等.时滞线性系统的 H_∞ 控制.控制与决策, 1999, 14(6): 712 ~ 715

[78] Choi H H et al. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls. Automatica, 1995, 31(9): 1349 ~ 1351

[79] 王德进.一类非线性不确定时滞系统的鲁棒镇定.控制与决策, 1999, 14(4): 373 ~ 376

[80] 王德进等.一类非线性不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制.控制与决策会议论文集.昆明, 2000. 269 ~ 273

[81] 顾永如等.具有状态滞后的线性不确定系统的鲁棒可靠 H_∞ 控制.控制理论与应用. 1999, 16(1): 149 ~ 151

[82] Niculescu S I. H_∞ memoryless control with an α-stability constraints for time-delay systems: An LMI approach. IEEE Trans. Automat. Control, 1998, 43(5): 739 ~ 743

[83] Petersen I R and Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. Automatica, 1986, 22(4): 397 ~ 411

[84] Hale J et al. Introduction to functional differential equations. New York: springer, 1993

[85] Niculescu S I et al. Robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay: single delay case. Proc. of IFAC symposium on Robust Control Design, Riode Janeiro, Brazil, 1994. 469 ~ 474

[86] Su J H. Further results on the robust stability of linear systems with a single time delay. Systems & Control Letters. 1994, 23: 375 ~ 379

[87] Choi H H et al. An LMI approach to H_∞ controller design for linear time-varying systems. Automatica, 1997, 33(4): 737 ~ 739

[88] Sato T et al. LMI solution to general H_2 suboptimal control problems. Systems & Control Letters, 1999, 36: 295 ~ 305

[89] Petersen I R et al. Optimal quaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1994, 39(9): 1971 ~ 1977

[90] Yu L et al. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. Automatica, 1999, 35: 1155 ~ 1159

[91] Zhou K et al. Mixed H_2 and H_∞ performance objective Ⅰ: Robust performance analysis. IEEE Trans. Automat. Control, 1994, 39(8): 1564 ~ 1574

[92] Doyle J C et al. Mixed H_2 and H_∞ performance objective Ⅱ: Optimal control. IEEE Trans. Automat. Control, 1994, 39(8): 1575 ~ 1587

[93] Khargonekar P P et al. Mixed H_2/H_∞ control: A convex optimization approach. IEEE Trans. Automat. Control, 1991, 36(7): 824 ~ 837

[94] 王德进等. H_2/H_∞混合控制器参数化. 中国控制会议论文集. 宁波, 1998. 67 ~ 71

[95] 郭雷等. 基于 LMI 的一类混合 H_2/H_∞控制问题降阶控制器设计:连续情形. 自动化学报, 1998, 24(3): 294 ~ 300

[96] 袁立嵩等. 具有闭环极点位置约束的 H_2/H_∞混合控制. 自动化学报, 1995, 21(2): 170 ~ 177

[97] Mariton M and Bertrand R. A homotopy algorithm for solving coupled Riccati equations. Optimal. contr. Appl. Meth., 1985, 6: 351 ~ 357

[98] 黄有度等. 矩阵论及其应用. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1995